

## Перечислительная комбинаторика

Количество способов, выбрать из  $n$  - элементного множества  $k$  - элементное подмножество, равно  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

1. Сколькими способами можно выложить в ряд пять красных, пять синих и пять зелёных шаров так, чтобы никакие два синих шара не лежали рядом?
2. В волшебном мире 15 королевств. Между некоторыми королевствами есть торговый пути. Известно, что всего этих путей 92. Докажите, что в этом мире житель любого королевства может добраться до любого другого передвигаясь только по торговыми путям.
3. Рассмотрим клетчатую таблицу  $20 \times 21$ . Посчитайте общее количество прямоугольников внутри неё. Например, внутри таблицы  $2 \times 2$  ровно 9 прямоугольников: 4 прямоугольника  $1 \times 1$ , 4 прямоугольника  $1 \times 2$ , 1 прямоугольник  $2 \times 2$ .
4. Найдется ли 333 способа выбрать 3 различных числа от 1 до 18 таким образом, чтобы их произведение делилось на 9?
5. В параллели 100 человек. Известно, что 50 из них мальчики. Каждый день, какие-то 14 учеников назначаются дежурными. Известно, что девочек среди дежурных всегда не больше, чем мальчиков. Какое максимальное число дней команда дежурных может не повторяться? В ответе не должно быть длинных сумм.
6. На пиру в Минас Тирите собрались 30 влиятельных господ. Каждый из них был знаком хотя бы с 10 другими господами. Докажите, что найдутся два господина, у которых было хотя бы четверо общих знакомых на этом пиру.
7. В некоторой компании из 14 человек среди любых четырёх людей есть двое, которые дружат. Докажите, что можно выбрать несколько ( $> 2$ ) человек из этой компании и посадить их за круглый стол так, чтобы все соседи были друзьями.
8. В школе чародейства и волшебства Хогвартс, где учится 200 волшебников, имеется некоторое секретное общество. На каждом собрании секретного общества происходит либо приём одного члена в это общество, либо изгнание из общества одного волшебника. Достоверно известно, что в этом обществе не может быть меньше, чем 4 волшебника. Правилами общества запрещено возвращение к какому-либо из прошлых составов. Может ли к какому-то моменту оказаться, что все варианты состава этого секретного общества реализованы?