

Тождественные преобразования

1. Даны различные ненулевые действительные числа x и y такие, что

$$\frac{x}{y} + x = \frac{y}{x} + y.$$

Чему может быть равно $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$?

2. Сумма четырёх целых чисел равна 0. Числа расставили по кругу и каждое умножили на сумму двух его соседей. Докажите, что сумма этих четырёх произведений, умноженная на -1 , равна удвоенному квадрату целого числа.
3. Парно различные числа a, b, c таковы, что $a^3 - 3a = b^3 - 3b = c^3 - 3c$. Чему равно:
(а) $a^2 + ab + b^2$; (б) $a + b + c$; (в) $a^2 + b^2 + c^2$?
4. Числа a, b, c удовлетворяют равенству

$$(a + b + c)(ab + ac + bc) = abc.$$

Докажите, что сумма каких-то двух из них равна нулю.

5. Положительные числа a, b, c, d в произведении дают 1. Докажите, что

$$\frac{1}{1 + a + ab + abc} + \frac{1}{1 + b + bc + bcd} + \frac{1}{1 + c + cd + cda} + \frac{1}{1 + d + da + dab} = 1.$$

6. Произведение трёх ненулевых чисел равно 1, а их сумма равна сумме обратных к ним чисел. Докажите, что одно из чисел равно 1.
7. Даны целые a, b, c, d . Обозначим $n = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$. Докажите, что существуют такие целые x, y , что $n = x^2 + y^2$.
8. Натуральные числа a, b, c таковы, что

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2.$$

Докажите, что ab — точный квадрат.

9. Докажите, что если $\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0$, то и $\frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} = 0$.