Диагностическая работа. Очный этап, решения

1. Натуральные числа a, b, c, d, e нечётны и не являются точными квадратами. Может ли произведение $a^b \cdot b^c \cdot c^d \cdot d^e \cdot e^a$ быть точным квадратом?

Ответ: Может.

Решение. Подойдут, например, числа

$$a = 3 \cdot 5,\ b = 5 \cdot 7,\ c = 7 \cdot 11,\ d = 11 \cdot 13,\ e = 13 \cdot 3.$$

Несложно видеть, что каждое простое число будет входить в итоговое произведение в чётной степени, поэтому оно будет квадратом.

2. Найдите все решения уравнения

$$\frac{x-2022}{1} + \frac{x-2021}{2} + \ldots + \frac{x-1023}{1000} = \frac{x-1}{2022} + \frac{x-2}{2021} + \ldots + \frac{x-1000}{1023}.$$

Ответ: $x = 2023$.

Решение. Несложно видеть, что при $x = 2023$ все слагаемые будут равны 1. Поскольку количество слагаемых в левой и правой частях одинаково, то $x = 2023$ является корнем уравнения.

Заметим, что уравнение из условия линейное, причём коэффициент перед x не равен нулю, так как коэффициенты перед x при соответствующих слагаемых в левой части уравнения больше соответствующих коэффициентов в правой части уравнения. Следовательно, оно имеет единственный корень.

3. В деревне 128 человек, каждый из них живёт в одном из 18 домов, причём в каждом доме кто-то живёт. Каждый житель сыграл по одной партии в шахматы со всеми жителями из других домов. Каково наименьшее возможное число сыгранных партий?

Ответ: 2023.

Решение. Выберем в каждом доме одного человека, назовём его *хозяином*. Каждый из 110 других жителей (не являющихся хозяевами) сыграл по партии с каждым из 17 хозяев других домов, что даёт $110 \cdot 117 = 1870$ партий. Кроме того, было сыграно ещё

$$C_{18}^2 = \frac{18 \cdot 17}{2} = 153$$

партии между хозяевами. Значит, было сыграно не менее $1870 + 153 = 2023$ партий. Ровно 2023 партии действительно могло быть, если в одном из домов проживало 111 человек, а в остальных домах было по одному жителю.

4. На столе лежат N спичек ($N > 3$). Двое делают ходы по очереди. За один ход разрешается объединить любые две кучки спичек, если в результате объём кучки не превысит $N/2$. В начале каждая кучка состоит из одной спички. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Кто выиграет при правильной игре?

Ответ: выигрывает второй игрок.

Решение. Заметим, что если на столе лежит хотя бы 4 кучки спичек, то ход можно сделать. В самом деле, в этот момент в двух самых маленьких кучках спичек суммарно не может быть больше, чем во всех остальных кучках. Значит, в этих двух кучках спичек не больше половины от общего числа, и эти две кучки можно объединить.

Если N нечётно и на столе осталось 3 кучки, ход сделать нельзя. Действительно, если ход возможен, то после него на столе будет две кучки, в самой большой из которых спичек хотя бы $N/2$. Так как число $N/2$ нецелое при нечётном N, то в этой кучке спичек должно быть строго больше, чем $N/2$, что запрещено правилами.

Значит, если N нечётно, второй игрок может делать любые доступные ходы, пока это возможно. Количество кучек с каждым ходом уменьшается на 1, так что после хода второго игрока всегда будет оставаться нечётное число кучек. Поэтому наступит момент, когда на столе останется 3 кучки и будет очередь хода первого игрока. В силу сказанного ранее он не сможет сделать ход, так что второй игрок выиграет.

Покажем, как второй игрок может выиграть при чётном N. Промежуточная цель второго игрока — создать кучку в точности из $N/2$ спичек. Выберем одну из спичек и назовём кучку, в которой находится эта спичка, *главной* (изначально главная кучка состоит из одной спички).

До тех пор, пока это возможно, второй игрок будет действовать так, чтобы после хода второго игрока все кучки, кроме главной, состояли из одной спички. А именно,

- если первый игрок своим ходом добавляет одну спичку в главную кучку, второй игрок добавляет в главную кучку ещё одну спичку;
- если же первый игрок объединяет две кучки из одной спички, второй игрок в ответ объединяет получившуюся кучку из двух спичек с главной.

Так можно действовать, если после какого-то хода первого игрока в главной кучке не больше $N/2-2$ спичек. Если после какого-то хода первого игрока в главной кучке ровно $N/2-1$ спичек, второй игрок, независимо от предыдущего хода первого, добавляет одну спичку в главную кучку (напомним, что $N > 3$, так что даже если первый игрок своим предыдущим ходом объединил две кучки из одной спички, остаётся ещё хотя бы одна кучка из одной спички). Если же после какого-то хода первого игрока в главной кучке ровно $N/2$ спичек, промежуточная цель уже достигнута.

Полученную кучку из $N/2$ спичек нельзя объединить ни с одной из остальных кучек. Все остальные кучки можно объединять между собой как угодно, потому что в них суммарно $N/2$ спичек. Следовательно, игра закончится в тот момент, когда все остальные кучки объединятся в одну, то есть когда на столе останется ровно 2 кучки. В этот момент будет очередь хода первого игрока, так как после каждого хода второго на столе остаётся чётное число кучек. Значит, первый не сможет сделать ход, соответственно, второй победит.

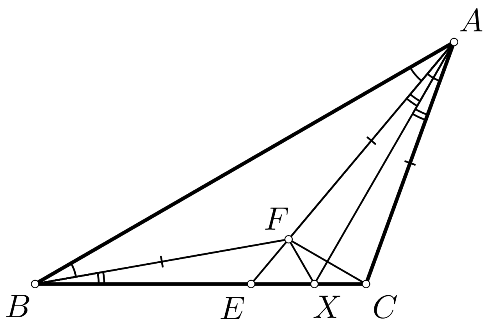
5. Дан треугольник ABC, в котором $\angle A = \frac{4}{3}\angle B < 90°$. На биссектрисе AE этого треугольника выбрана точка F такая, что $AF = AC$ и $2\angle ABF = \angle BAC$. Найдите величину угла BCF.

Ответ: 30°.

Решение. Их условия следует, что $\angle ABF = \angle BAF$, то есть треугольник ABF равнобедренный. Также

$$\angle FBE = \angle B - \frac{\angle A}{2} = \frac{\angle A}{4}.$$

Проведём биссектрису AX угла CAE. Из полученного равенства следует, что $\angle FAX = \angle FBX$. Следовательно, $\angle BAX = \angle ABX$, то есть треугольник ABX равнобедренный.



Точки F и X лежат на серединном перпендикуляре к отрезку AB, поэтому XF — биссектриса угла AXB.

По условию треугольник AFC равнобедренный, AX — биссектриса угла CAF, а, следовательно, и серединный перпендикуляр к отрезку CF. Тогда треугольник CFX равнобедренный и XA — биссектриса угла CXF. Отсюда лучи XF и XA делят развёрнутый угол на три равных части, то есть $\angle AXC = 60°$. Но тогда

$$\angle BCF = \angle XCF = 90° - 60° = 30°.$$

6. Найдите наименьшее натуральное n, при котором у чисел n^2 и $n^2 + 7^{2023}$ одинаковое количество натуральных делителей.

Ответ: $\dfrac{7^{1010} \cdot (7^3 - 1)}{2}$.

Решение. Напомним, что если натуральное число m раскладывается на простые множители как

$$m = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \ldots p_r^{s_r},$$

где $p_i \neq p_j$ при $i \neq j$, то количество натуральных делителей числа m равно

$$(s_1 + 1)(s_2 + 1) \ldots (s_r + 1).$$

Из этой формулы легко видеть, что количество натуральных делителей числа m нечётно, если и только если m — точный квадрат.

Перейдём к решению задачи. Число n^2 — точный квадрат, поэтому имеет нечётное число натуральных делителей. Значит, число $n^2 + 7^{2023}$ также должно быть точным квадратом, то есть $n^2 + 7^{2023} = a^2$ для некоторого натурального a. Перепишем это равенство как

$$(a - n)(a + n) = 7^{2023}.$$

Отсюда $a - n = 7^k$, $a + n = 7^{2023-k}$, где k — некоторое целое число от 0 до 2023. Более того, так как $a + n > a - n$, получаем, что $k < 2023 - k$, так что $k \leqslant 1011$.

Из равенств $a+n=7^k$ и $a-n=7^{2023-k}$, находим

$$n=\frac{7^k(7^{2023-2k}-1)}{2},\quad a=\frac{7^k(7^{2023-2k}+1)}{2}.$$

При $k=1011$ получаем $n=7^{1011}\cdot 3$, $a=7^{1011}\cdot 2^2$, так что по формуле количества натуральных делителей n имеет $1012\cdot 2$, а a — $1012\cdot 3$ натуральных делителей, что нам не подходит.

При $k=1010$ получаем $n=7^{1010}\cdot 3^2\cdot 19$, $a=7^{1010}\cdot 2^2\cdot 43$, так что оба числа n и a имеют по $1011\cdot 3\cdot 2$ натуральных делителей, что подходит под условие.

Если подставить $k\leqslant 1009$, получим

$$a=\frac{7^{2023-k}+7^k}{2}>\frac{7^{2023-k}}{2}\geqslant\frac{7^{1014}}{2}=\frac{7\cdot 7^{1013}}{2}\geqslant\frac{2\cdot 7^{1013}}{2}=\frac{7^{1013}+7^{1013}}{2}>\frac{7^{1013}+7^{1010}}{2},$$

то есть при $k\leqslant 1009$ получается большее значение a, чем при $k=1010$. Значит, наименьшее значение a достигается при $k=1010$, а поскольку $n^2=a^2-7^{2023}$, то при $k=1010$ достигается и наименьшее значение n, равное, напомним,

$$n=\frac{7^{1010}\cdot(7^3-1)}{2}.$$