

## Разной по чиселкам

1. Можно ли вместо звёздочек вставить в выражение

$$[* , * , *] - [* , * , *] = 2023$$

в некотором порядке шесть последовательных натуральных чисел так, чтобы равенство стало верным?

2. Сколько существует натуральных чисел  $n$ , меньших 2023, для которых выполнено сравнение  $2^n - n^2 \equiv 0 \pmod{7}$ ?
3. Известно, что для любых натуральных  $a, b$  верно, что  $(a, b)[a, b] = ab$ . Но равенство

$$(a, b, c)[a, b, c] = abc$$

для натуральных  $a, b, c$  может выполняться, а может и нет. Приведите пример, когда это равенство не выполняется. Каким неравенством всегда будут связаны  $(a, b, c)[a, b, c]$  и  $abc$ ?

4. Даны натуральные взаимно простые числа  $a$  и  $b$ . Докажите, что

$$(2a + b, a(a + b)) = 1.$$

5. Найдите все натуральные числа, не представимые в виде суммы двух взаимно простых чисел, отличных от единицы.
6. Чему равен НОД всех чисел вида  $4^{n+2} + 5^{2n+1}$  при натуральных значениях  $n$ ?
7. Виктор Дмитриевич задумал целое число, большее 100. Алексей Вадимович называет целое число, большее 1. Если число Виктора Дмитриевича делится на это число, Алексей Вадимович выиграл, иначе Виктор Дмитриевич вычитает из своего числа названное, и Алексей Вадимович называет следующее число. Ему запрещается повторять числа, названные ранее. Если число Виктора Дмитриевича станет отрицательным, то Алексей Вадимович проигрывает. Есть ли у Алексея Вадимовича выигрышная стратегия?
8. Существуют ли натуральные числа  $a, b, c$  такие, что

$$(a^2, b^2) + (a, bc) + (b, ac) + (c, ab) = 257.$$