Дистанционный этап

1.1. Мама не разрешает Пете играть в компьютерные игры дольше 100 минут в день. Более того, если в какой-то из дней он играет дольше 70 минут, то следующие два дня ему запрещено играть более 50 минут в день. Какое наибольшее количество минут Петя может провести за игрой в компьютерные игры за 25 дней, не нарушая требований мамы?

Ответ: 1780.

Решение. Если в какой-то из дней, кроме двух последних, Петя проведёт за игрой дольше 70 минут, то в следующие два дня он не сможет играть дольше $50+50=100$ минут, а всего за три дня он будет играть не дольше $100+50+50=200$ минут. Значит, в эти три дня ему выгоднее играть по 70 минут каждый день, тем самым, проведя за игрой 210 минут. Значит, в первые 23 дня Пете выгоднее играть по 70 минут в день. В последние два дня он может играть или $100+50=150$ минут, или $70+100=170$ минут, что выгоднее первого варианта. В итоге получаем, что всего за 25 дней Петя может играть максимум $23\cdot 70+70+100=1780$ минут.

1.2. Мама не разрешает Пете играть в компьютерные игры дольше 90 минут в день. Более того, если в какой-то из дней он играет дольше 60 минут, то следующие два дня ему запрещено играть более 40 минут в день. Какое наибольшее количество минут Петя может провести за игрой в компьютерные игры за 22 дня, не нарушая требований мамы?

Ответ: 1350.

1.3. Мама не разрешает Пете играть в компьютерные игры дольше 90 минут в день. Более того, если в какой-то из дней он играет дольше 60 минут, то следующие два дня ему запрещено играть более 40 минут в день. Какое наибольшее количество минут Петя может провести за игрой в компьютерные игры за 28 дней, не нарушая требований мамы?

Ответ: 1710.

1.4. Мама не разрешает Пете играть в компьютерные игры дольше 120 минут в день. Более того, если в какой-то из дней он играет дольше 100 минут, то следующие два дня ему запрещено играть более 80 минут в день. Какое наибольшее количество минут Петя может провести за игрой в компьютерные игры за 31 день, не нарушая требований мамы?

Ответ: 3120.

2.1. Лёша записал девять не обязательно целых чисел в клетки квадрата 3×3. Он заметил, что если выбрать три числа, стоящих в одной строке или в одном столбце, то их произведение будет равно 10. Также он заметил, что если выбрать четыре числа, стоящих в любом квадрате 2×2, то их произведение будет равно 3. Чему равно число, стоящее в центральной клетке таблицы?

Ответ: 0,00081.

Решение. Рассмотрим произведение чисел во всех четырёх квадратах 2×2, оно будет равно $3^4 = 81$. Запишем, сколько раз в этом произведении участвует каждое число в виде сомножителя.

1	2	1
2	4	2
1	2	1

Заметим, что если рассмотреть произведение числа в центральной клетке, чисел второго столбца и второй строки и чисел каждой из строк (в том числе второй), то каждое число из таблицы будет учтено в нём такое же количество раз. Следовательно, это произведение будет равно 81. С другой стороны, если обозначить число в центральной клетке через x, то это произведение будет равно $10^5 \cdot x$. Таким образом, x равен $\frac{81}{10^5} = 0{,}00081$.

2.2. Лёша записал девять не обязательно целых чисел в клетки квадрата 3×3. Он заметил, что если выбрать три числа, стоящих в одной строке или в одном столбце, то их произведение будет равно 10. Также он заметил, что если выбрать четыре числа, стоящих в любом квадрате 2×2, то их произведение будет равно 4. Чему равно число, стоящее в центральной клетке таблицы?

Ответ: 0,00256.

2.3. Лёша записал девять не обязательно целых чисел в клетки квадрата 3×3. Он заметил, что если выбрать три числа, стоящих в одной строке или в одном столбце, то их произведение будет равно 10. Также он заметил, что если выбрать четыре числа, стоящих в любом квадрате 2×2, то их произведение будет равно 2. Чему равно число, стоящее в центральной клетке таблицы?

Ответ: 0,00016.

3.1. В школе учится 123 ученика, некоторые из которых дружат между собой. Известно, что если два школьника между собой не дружат, то у них есть хотя бы один общий друг. Каково минимальное возможное число пар друзей среди школьников?

Ответ: 122.

Решение. Рассмотрим граф, вершинами которого являются ученики, а ребро между двумя вершинами проводится в том случае, если соответствующие школьники дружат между собой. Из условия следует, что этот граф связен, значит, в нём хотя бы $123 - 1 = 122$ ребра.

Приведём пример графа, содержащего ровно 122 ребра и удовлетворяющего условию задачи. Пусть есть один школьник, дружащий со всеми остальными, среди которых никто между собой не дружит. Тогда в соответствующем графе в точности 122 ребра и легко видеть, что этот граф подходит под условие.

3.2. В школе учится 234 ученика, некоторые из которых дружат между собой. Известно, что если два школьника между собой не дружат, то у них есть хотя бы один общий друг. Каково минимальное возможное число пар друзей среди школьников?

Ответ: 233.

3.3. В школе учится 345 учеников, некоторые из которых дружат между собой. Известно, что если два школьника между собой не дружат, то у них есть хотя бы один общий друг. Каково минимальное возможное число пар друзей среди школьников?

Ответ: 344.

3.4. В школе учится 456 учеников, некоторые из которых дружат между собой. Известно, что если два школьника между собой не дружат, то у них есть хотя бы один общий друг. Каково минимальное возможное число пар друзей среди школьников?

Ответ: 455.

4.1. Дан квадрат $PQRS$. На отрезке RS отметили точку X, а на продолжении луча SP за точку P — точку Y. Оказалось, что угол XQY прямой. Также известно, что $SY = 35$, $RX = 11$. Чему равна длина отрезка SX?

Ответ: 13.

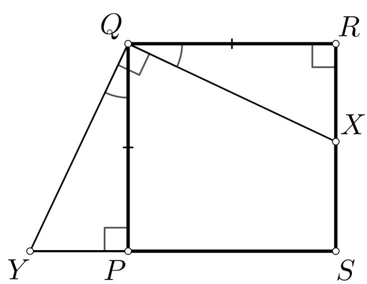
Решение. Заметим, что

$$\angle YQP = 90^\circ - \angle PQX = \angle RQX.$$

Отсюда следует, что прямоугольные треугольники QRX и QPY равны по катету ($RQ = QP$) и прилежащему острому углу. Значит, $PY = RX = 11$ и

$$PS = YS - YP = 35 - 11 = 24.$$

Наконец, $RS = SP = 24$ как стороны квадрата, так что $SX = RS - RX = 24 - 11 = 13$.



4.2. Дан квадрат $PQRS$. На отрезке RS отметили точку X, а на продолжении луча SP за точку P — точку Y. Оказалось, что угол XQY прямой. Также известно, что $SY = 29$, $RX = 11$. Чему равна длина отрезка SX?

Ответ: 7.

4.3. Дан квадрат $PQRS$. На отрезке RS отметили точку X, а на продолжении луча SP за точку P — точку Y. Оказалось, что угол XQY прямой. Также известно, что $SY = 20$, $RX = 6$. Чему равна длина отрезка SX?

Ответ: 8.

4.4. Дан квадрат $PQRS$. На отрезке RS отметили точку X, а на продолжении луча SP за точку P — точку Y. Оказалось, что угол XQY прямой. Также известно, что $SY = 25$, $RX = 8$. Чему равна длина отрезка SX?

Ответ: 9.

5.1. У Ивана есть два карандаша: синий и красный. Он записал на лист бумаги все натуральные числа от 1 до 2022, причём нечётные числа он записывал красным карандашом, а чётные — синим. Затем он сложил все цифры всех чисел, записанных красным, получив в результате число A, а также сложил все цифры всех чисел, записанных синим, получив в результате число B. Чему равна разность $A - B$?

Ответ: 1005.

Решение. Разобьём числа от 2 до 2021 на пары: 2 и 3, 4 и 5, …, 2020 и 2021. В каждой такой паре цифра в разряде единиц нечётного числа на 1 больше цифры в разряде единиц чётного числа, а цифры в остальных разрядах у двух чисел попарно совпадают. Поскольку количество таких пар равно 1010, сумма цифр всех нечётных чисел от 2 до 2021 на 1010 больше суммы цифр всех чётных чисел из того же промежутка.

Чтобы теперь вычислить разность $A - B$, к 1010 нужно прибавить сумму цифр числа 1, равную 1, и отнять сумму цифр числа 2022 равную 6. В ответе получаем

$$1010 + 1 - 6 = 1005.$$

5.2. У Ивана есть два карандаша: синий и красный. Он записал на лист бумаги все натуральные числа от 1 до 2024, причём нечётные числа он записывал красным карандашом, а чётные — синим. Затем он сложил все цифры всех чисел, записанных красным, получив в результате число A, а также сложил все цифры всех чисел, записанных синим, получив в результате число B. Чему равна разность $A - B$?

Ответ: 1004.

5.3. У Ивана есть два карандаша: синий и красный. Он записал на лист бумаги все натуральные числа от 1 до 2026, причём нечётные числа он записывал красным карандашом, а чётные — синим. Затем он сложил все цифры всех чисел, записанных красным, получив в результате число A, а также сложил все цифры всех чисел, записанных синим, получив в результате число B. Чему равна разность $A - B$?

Ответ: 1003.

5.4. У Ивана есть два карандаша: синий и красный. Он записал на лист бумаги все натуральные числа от 1 до 2028, причём нечётные числа он записывал красным карандашом, а чётные — синим. Затем он сложил все цифры всех чисел, записанных красным, получив в результате число A, а также сложил все цифры всех чисел, записанных синим, получив в результате число B. Чему равна разность $A - B$?

Ответ: 1002.

6.1. У Санта-Клауса есть 20 мандаринов, 23 банана, 12 шоколадок и 18 пирожных. Каждый детский подарок должен состоять либо из двух шоколадок и одного фрукта, либо из одного пирожного и двух фруктов. Перед раздачей подарков детям Санта-Клаус решил угостить своих эльфов. Для этого он положил на стол все угощения и сказал каждому эльфу подойти и взять один предмет, который ему нравится. Какое максимальное количество эльфов может быть у Санта-Клауса, чтобы вне зависимости от того, что возьмут эльфы, он смог собрать 15 подарков детям?

Ответ: 9.

Решение. Заметим, что если у Санта-Клауса будет хотя бы 10 эльфов, то каждый из них может взять себе по пирожному, и тогда из сладостей останется не больше 12 шоколадок и 8 пирожных, из которых нельзя собрать больше чем $\frac{12}{2} + 8 = 14$ подарков.

Теперь покажем, что если эльфов не больше 9, Санта-Клаус всегда сможет собрать 15 подарков. Заметим, что фруктов всегда останется не меньше, чем

$$20 + 23 - 9 = 34 > 30,$$

поэтому фруктов на 15 подарков хватит в любом случае. Все сладости разобьём на 24 группы, где первые 6 групп состоят из двух шоколадок, а остальные 18 групп состоят из пирожного. Так как эльфов не больше 9, они не смогут «испортить» больше 9 групп, поэтому хотя бы 15 групп останутся нетронутыми. К каждой из них Санта-Клаус добавит необходимое количество фруктов (которых заведомо хватит, как мы уже выяснили) и получит таким образом 15 подарков детям.

6.2. У Санта-Клауса есть 24 мандарина, 21 банан, 14 шоколадок и 17 пирожных. Каждый детский подарок должен состоять либо из двух шоколадок и одного фрукта, либо из одного пирожного и двух фруктов. Перед раздачей подарков детям Санта-Клаус решил угостить своих эльфов. Для этого он положил на стол все угощения и сказал каждому эльфу подойти и взять один предмет, который ему нравится. Какое максимальное количество эльфов может быть у Санта-Клауса, чтобы вне зависимости от того, что возьмут эльфы, он смог собрать 16 подарков детям?

Ответ: 8.

7.1. Сколько существует несократимых дробей, числитель которых равен 225 (а знаменатель — натуральное число) и которые больше $\frac{1}{226}$, но меньше $\frac{1}{225}$?

Ответ: 120.

Решение. Обозначим знаменатель такой дроби n. Условие

$$\frac{1}{226} < \frac{225}{n} < \frac{1}{225}$$

эквивалентно условию

$$225^2 < n < 225 \cdot 226,$$

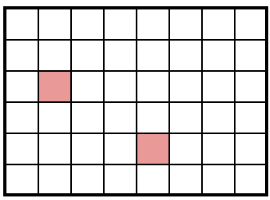
то есть $n = 225^2 + k$, где k может принимать значения от 1 до 224. Дробь $\frac{225}{n}$ несократима, если и только если n не делится ни на 3, ни на 5. Это эквивалентно тому, что k не делится ни на 3, ни на 5.

Таким образом, нам остаётся найти количество натуральных чисел от 1 до 224, взаимно простых с 3 и 5. Понятно, что это оно равно количеству натуральных чисел от 1 до 225, взаимно простых с 3 и 5. Чтобы найти его, из общего количества чисел от 1 до 225, то есть из 225, вычтем количество чисел делящихся на 3, то есть $\frac{225}{3} = 75$, а также количество чисел делящихся на 5, то есть $\frac{225}{5} = 45$. При этом мы дважды учли числа, делящиеся и на 3, и на 5, то есть делящиеся на 15, поэтому их количество, равное $\frac{225}{15} = 15$ нужно один раз прибавить к разности $225 - 75 - 45$. В итоге получаем ответ $225 - 75 - 45 + 15 = 120$.

7.2. Сколько существует несократимых дробей, числитель которых равен 441 (а знаменатель — натуральное число) и которые больше $\frac{1}{442}$, но меньше $\frac{1}{441}$?

Ответ: 252.

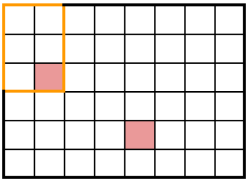
8.1. Есть клетчатый листочек бумаги 6×8. Две его клетки закрашены, как показано на рисунке. Наташа хочет вырезать из листочка прямоугольник по границам клеток так, чтобы в него попала ровно одна из двух закрашенных клеток. Сколькими способами она может это сделать?

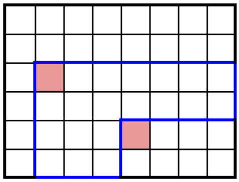


Ответ: 272.

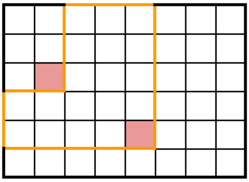
Решение. Заметим, что прямоугольник однозначно задаётся своей левой верхней и правой нижней клетками (они могут совпадать, в этом случае прямоугольник будет состоять из одной клетки).

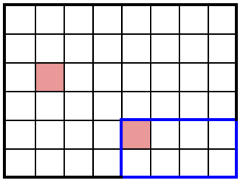
Рассмотрим прямоугольники, которые содержат левую из двух закрашенных клеток. Несложно видеть, что их левая верхняя клетка должна располагаться в оранжевой области, а правая нижняя — в синей, причём любая пара клеток подходит. Таким образом, количество прямоугольников, содержащих левую закрашенную клетку, равно $6 \cdot 20 = 120$.





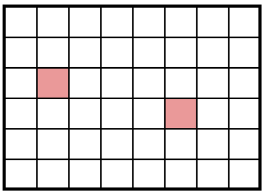
Аналогично для правой закрашенной клетки левая верхняя клетка должна располагаться в оранжевой области, а правая нижняя — в синей, причём любая пара клеток подходит. Таким образом, количество таких прямоугольников равно $19 \cdot 8 = 152$.





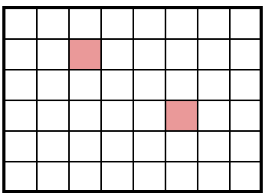
Суммарно $120 + 152 = 272$ прямоугольника.

8.2. Есть клетчатый листочек бумаги 6×8. Две его клетки закрашены, как показано на рисунке. Наташа хочет вырезать из листочка прямоугольник по границам клеток так, чтобы в него попала ровно одна из двух закрашенных клеток. Сколькими способами она может это сделать?



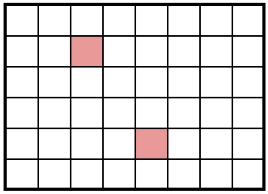
Ответ: 276.

8.3. Есть клетчатый листочек бумаги 6×8. Две его клетки закрашены, как показано на рисунке. Наташа хочет вырезать из листочка прямоугольник по границам клеток так, чтобы в него попала ровно одна из двух закрашенных клеток. Сколькими способами она может это сделать?



Ответ: 288.

8.4. Есть клетчатый листочек бумаги 6×8. Две его клетки закрашены, как показано на рисунке. Наташа хочет вырезать из листочка прямоугольник по границам клеток так, чтобы в него попала ровно одна из двух закрашенных клеток. Сколькими способами она может это сделать?



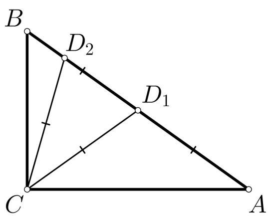
Ответ: 284.

9.1. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C, в котором $\angle BAC = 35^\circ$. На гипотенузе AB выбрали точку D так, что $AB = 2CD$. Какие значения в градусах может принимать угол BCD? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 15°, 55°.

Решение. Пусть D_1 — середина отрезка AB. По свойству медианы в прямоугольном треугольнике имеем $AB = 2CD_1$, так что $CD = CD_1$. Рассмотрим следующие случаи.

- Точка D совпадает с D_1. Тогда треугольник CD_1A равнобедренный с основанием AC, поэтому $\angle CAD_1 = \angle ACD_1 = 35^\circ$, $\angle BCD = \angle BCD_1 = 90^\circ - \angle ACD_1 = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$.
- Точка D лежит на отрезке AD_1. Так как $\angle AD_1C = 180^\circ - 2 \cdot 35^\circ = 110^\circ$, получаем, что в равнобедренном треугольнике CD_1D угол при основании тупой. Значит, такой случай невозможен.
- Точка D лежит на отрезке BD_1 (на рисунке это положение точки D обозначено D_2). Тогда CD_1D_2 — равнобедренный треугольник с основанием D_1D_2, причём $\angle CD_2D_1 = \angle CD_1D_2 = 70^\circ$. Отсюда $\angle D_1CD_2 = 180^\circ - 2 \cdot 70^\circ = 40^\circ$, $\angle BCD = \angle BCD_2 = \angle BCD_1 - \angle D_2CD_1 = 55^\circ - 40^\circ = 15^\circ$.



9.2. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C, в котором $\angle BAC = 40^\circ$. На гипотенузе AB выбрали точку D так, что $AB = 2CD$. Какие значения в градусах может принимать угол BCD? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 30°, 50°.

9.3. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C, в котором $\angle BAC = 50°$. На гипотенузе AB выбрали точку D так, что $AB = 2CD$. Какие значения в градусах может принимать угол BCD? Укажите все возможные варианты.

Ответ: $40°$, $60°$.

9.4. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C, в котором $\angle BAC = 55°$. На гипотенузе AB выбрали точку D так, что $AB = 2CD$. Какие значения в градусах может принимать угол BCD? Укажите все возможные варианты.

Ответ: $35°$, $75°$.

10. Ваня написал на доске 9 целых чисел. Витя посчитал все возможные суммы по 8 из этих чисел, всего получилось 9 сумм. Оказалось, что эти 9 сумм принимают 8 различных значений: 81, 82, 83, 84, 85, 86, 88, 89. Найдите произведение наибольшего и наименьшего из чисел, записанных Ваней.

Ответ: 84.

Решение. Восемь из девяти сумм даны в условии, а оставшаяся сумма совпадает с одной из них. Рассмотрим сумму S всех девяти сумм. Каждое из чисел, записанных Ваней, будет учитываться в ней 8 раз, поэтому S должно делиться на 8. Поскольку сумма восьми сумм из условия даёт остаток 6 при делении на 8, то оставшаяся сумма даёт остаток 2 при делении на 8. Из приведённых сумм только 82 даёт остаток 2 при делении на 8.

Таким образом,

$$S = 81 + 82 + 82 + 83 + 84 + 85 + 86 + 88 + 89 = 760.$$

Следовательно, сумма чисел, записанных Ваней, равна $\frac{760}{8} = 95$. Тогда наименьшее из Ваниных чисел равно $95 - 89 = 6$, а наибольшее равно $95 - 81 = 14$. Их произведение равно $6 \cdot 14 = 84$.