

Вокруг суммы цифр

Пусть $S(n)$ — сумма цифр натурального числа n .

1. Докажите, что $S(a + b) = S(a) + S(b) - 9p$, где p — количество переносов при сложении a и b в столбик.
2. Найдите наименьшее натуральное n , для которого $S(n) = 13$, а также
 - (а) $S(4n) = 52$;
 - (б) $S(4n) = 34$.
3. Известно, что сумма цифр натурального числа n равна 100, а сумма цифр числа $5n$ равна 50. Докажите, что n чётно.
4. Докажите, что

$$S(1) - S(2) + S(3) - \dots - S(7^{100} - 1) + S(7^{100}) = \frac{7^{100} + 1}{2}.$$

5. Пусть $p(n)$ — количество переносов при сложении чисел 2022 и $2022 \cdot n$ в столбик. Например, $p(1) = p(2) = p(3) = 0$, $p(4) = 3$. Докажите, что

$$p(1) + p(2) + \dots + p(10^{2022} - 1) = \frac{2}{3} \cdot (10^{2022} - 1).$$

6. Антиподом натурального числа называется число, записанное теми же цифрами в обратном порядке. Каждое k -значное натуральное число без нулей в записи сложили с его антиподом и выписали на доску все результаты. Оказалось, что на доске нет чисел, в записи которых были бы только нечётные цифры. Какие остатки может давать k при делении на 4?
7. Про натуральное число n известно, что $S(n) = 100$, а $S(55n) = 1000$. Найдите $S(3n)$.
8. Найдите наименьшее натуральное n , для которого $S(n)$ и $S(n + 10)$ делятся на 19.
9. Лёша задумал натуральное число n и сообщил Вите его сумму цифр $S(n)$. Витя хочет угадать число Лёши. Он может выбирать любое натуральное число m и узнавать у Лёши сумму цифр числа $|n - m|$. Как Вите за $S(n)$ вопросов гарантированно узнать число Лёши?