

За графы замолвим словечко

1. Могут ли степени вершин в графе быть равны:
 - (а) 8, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 2?
 - (б) 7, 7, 6, 5, 4, 2, 2, 1?
 - (в) 6, 6, 6, 5, 5, 3, 2, 2?
2. В спортклубе тренируются 100 толстяков, веса которых равны 1 кг, 2 кг, ..., 100 кг. На какое наименьшее число команд их можно разделить, чтобы ни в какой команде не было двух толстяков, один из которых вдвое тяжелее другого?
3. Пусть в графе степень каждой вершины хотя бы d . Докажите, что найдется цикл длины не меньше d .
4. Какое наименьшее число ребер можно удалить из полного графа на n вершинах, чтобы он стал несвязен?
5. В компании из семи человек любые шесть могут сесть за круглый стол так, что каждые два соседа окажутся знакомыми. Докажите, что и всю компанию можно усадить за круглый стол так, что каждые два соседа окажутся знакомыми.
6. Клетчатая плоскость раскрашена десятью красками так, что соседние (т. е. имеющие общую сторону) клетки покрашены в разные цвета, причём все десять красок использованы. Каково минимально возможное число пар соседних красок? (Две краски называются соседними, если ими покрашены какие-то две соседние клетки.)
7. Вика отметила на плоскости n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Игорь соединил некоторые пары Викиных точек отрезками красного цвета, а Сережа — отрезками зеленого цвета. Оказалось, что любая пара точек соединена ровно одним отрезком.
 - (а) Докажите, что можно выбрать цвет так что между любыми двумя точками есть путь по отрезкам выбранного цвета.
 - (б) Докажите, что можно выбрать точку A и цвет так, что от A до любой другой точки есть путь выбранного цвета из не более чем двух отрезков.
 - (в) Докажите, что для каждой точки A можно выбрать цвет так, что от A до любой другой точки есть путь выбранного цвета из не более чем двух отрезков.
 - (г) Докажите, что можно выбрать цвет так, что между любыми двумя точками есть путь выбранного цвета длины не больше 3.
8. В стране 2000 городов. Каждый город связан беспосадочными двусторонними авиалиниями с некоторыми другими городами, причём для каждого города число исходящих из него авиалиний есть степень двойки (то есть 1, 2, 4, ...). Для каждого города A статистик подсчитал количество маршрутов, имеющих не более одной пересадки, связывающих A с другими городами, а затем просуммировал полученные результаты по всем 2000 городам. У него получилось 100000. Докажите, что статистик ошибся.