Деревья

Определение 1. Связный граф без циклов называется *дерево.*

Определение 2. Часть графа содержащая все его вершины и являющаяся деревом называется *остовным деревом.*

Свойство 1. В любом связном графе можно выделить остовное дерево.

Свойство 2. Пусть в дереве есть хотя бы две вершины. Тогда в нем есть хотя бы две висячие вершины.

Свойство 3. В дереве на n вершинах ровно $n-1$ ребро.

1. В дереве имеется 200 вершин степени 5, 100 вершин степени 3, а остальные — висячие. Сколько висячих вершин в этом дереве?

2. Между любыми двумя соседними клетками шахматной доски лежит спичка. Какое наименьшее число спичек можно убрать, чтобы ладья могла попасть за несколько ходов из любой клетки в любую другую, не перескакивая через спички?

3. Система станций метро устроена таким образом, что из каждой станции в каждую можно проехать. Докажите, что одну из станций можно закрыть так, что это свойство сохранится.

4. В стране ровно 100 городов и 199 двусторонних авиалиний. Из любого города можно добраться самолётами до любого другого. Докажите, что найдётся замкнутый маршрут, при закрытии всех авиалиний которого из любого города по-прежнему можно будет добраться до любого другого.

5. В связном графе есть вершина степени n. Докажите, что в этом графе можно выделить n вершин так, чтобы при удалении любого набора из этих вершин, граф оставался связным.

6. **(а)** Докажите, что для любого набора чисел $0 < d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_n$ такого, что $d_1 + \ldots + d_n = 2n-2$, найдется дерево, где степени вершин будут $d_1, \ldots, d_n$.

(б) А единственно ли это дерево?

7. В стране 2022 городов, некоторые из которых соединены авиалиниями. Известно, что от каждого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Докажите, что можно побывать во всех городах, совершив не более 4040 перелётов.

8. В графе на 101 вершине ребра покрасили в 3 цвета. Оказалось, что после выбрасывания ребер любого цвета остается связный граф. Какое минимальное количество ребер могло быть в изначальном графе?