Сравнения по модулю

Определение. Целые числа a и b *сравнимы по модулю* m, если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

- они имеют одинаковые остатки при делении на m;
- их разность делится на m.

Свойства сравнений

- если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$;
- если $a \equiv b \pmod{m}$ и k — целое число, то $ak \equiv bk \pmod{m}$;
- если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $ac \equiv bd \pmod{m}$;
- если $a \equiv b \pmod{m}$, то $a^n \equiv b^n \pmod{m}$ при любом натуральном n;
- если $ka \equiv kb \pmod{m}$ и НОД$(k, m) = 1$, то $a \equiv b \pmod{m}$.

1. Найдите остаток от деления
(а) 47^{101} на 31; **(б)** $9^{2022} + 13^{2022}$ на 11;
(в) $9^{53} + 23^{52} + 30^{51}$ на 7; **(г)** $5^{70} + 6^{70}$ на 61;
(д) $1^{101} + 2^{101} + 3^{101} + \ldots + 2022^{101}$ на 2023; **(е)** $51! + \frac{102!}{51!}$ на 103.

2. Решите в натуральных числах уравнение $2^x + 7^y = 19^z$.

3. Фродо перемножил тысячу первых простых чисел, а затем то ли увеличил, то ли уменьшил полученное число на 1. Мог ли Фродо получить точный квадрат?

4. Существует ли степень двойки, из которой перестановкой цифр можно получить другую степень двойки? (Цифру 0 ставить на первое место нельзя.)

5. При каких натуральных n число $20^n + 16^n - 3^n - 1$ делится на 323?

6. Найдите все натуральные числа m, a, b такие, что $m! = 2^a + 2^b$.

7. Натуральные числа x и y, большие 1, таковы, что число x^2+y^2-1 делится на $x+y-1$. Докажите, что число $x + y - 1$ составное.

8. Последовательность чисел задана следующим образом:

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_{k+2} = a_k \cdot a_{k+1} + 1$$

при всех натуральных k. Докажите, что при всех натуральных $n \geqslant 7$ число $a_n - 3$ является составным.