Соответствия

1. Докажите, что натуральное число является точным квадратом тогда и только тогда, когда оно имеет нечётное число делителей.

2. В выпуклом n-угольнике ($n > 3$) отметили все точки пересечения диагоналей. Известно, что никакие три диагонали не пересекаются в одной точке. Сколько точек было отмечено?

3. На празднике в честь победы над Сауроном за столом в ряд сидят несколько гномов и хоббитов. Известно, что рядом с каждым гномом сидит хоббит. Какое наименьшее количество хоббитов могло быть, если гномов было 2023?

4. Среди автобусных билетов с номерами от 000000 до 999999 каких больше: счастливых (у которых сумма первых трёх цифр равна сумме последних трёх цифр) или билетов с суммой цифр 27?

5. У Пети есть 12 одинаковых разноцветных вагончиков (некоторые, возможно, одного цвета, но неизвестно, сколько вагончиков какого цвета). Каких поездов он сможет составить больше: 12-вагонных или 11-вагонных? (Поезда считаются одинаковыми, если в них на одних и тех же местах находятся вагончики одного и того же цвета.)

6. Дано натуральное число n.

(а) Докажите, что количество способов разбить n на не более чем k слагаемых, совпадает с числом способов разбить число n на слагаемые, каждое из которых не превосходит k.

(б) Докажите, что количество способов разбить число n на нечётные слагаемые совпадает с количеством способов разбить число n на различные слагаемые.

(в) Докажите, что количество разбиений числа n на слагаемые, равно количеству разбиений числа $2n$ ровно на n слагаемых.

7. Ваня считает все пути из левого нижнего узла клетчатого квадрата 10×10 в правый верхний, идущие по линиям сетки вправо или вверх и не поднимающиеся выше главной диагонали. Его друг Игорь расставляет а прямоугольнике 2×10 числа 1 до 20 так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце числа шли по возрастанию. У кого количество способов получилось больше?

8. Докажите, что при любом натуральном n уравнения $x^2 + y^2 = n$ и $x^2 + y^2 = 2n$ имеют одинаковое количество решений в целых числах.