Разнобой

1. Рассмотрим все 14-значные числа, в записи которых цифры от 1 до 7 встречаются ровно по два раза (например, 61137372562445). Докажите, что ни одно из этих чисел не делится на другое.

2. Найдите число способов представить $\frac{1}{1000}$ в виде суммы двух различных аликвотных дробей.

3. Два кота делят огромную цепочку из 100 свиных и 200 говяжьих сосисок, причем хотят разделить её так, чтобы каждому досталось ровно по половине сосисок каждого вида. Какое минимальное число разрезов надо сделать для этого?

4. На доске написаны числа 1, 3, 5, 7, 9. Разрешается стереть с доски любые два числа a и b и написать вместо них числа $7a-4b$ и $12a+7b$. Можно ли такими операциями добиться того, чтобы на доске оказались числа 2015, 2017, 2019, 2021, 2023?

5. На доске написано простое число. Каждую минуту его изменяют: умножают на 2 и либо прибавляют, либо вычитают 1. Докажите, что когда-нибудь получится составное число.

6. В углу шахматной доски 8×8 стоит фишка. Петя и Вася двигают фишку по очереди, начинает Петя. Он делает фишкой один ход как ферзём (пройденной считается только клетка, куда в итоге переместилась фишка), а Вася — два хода как королем (обе клетки считаются пройденными). Нельзя ставить фишку на клетку, где она уже бывала (включая исходную клетку). Кто не сможет сделать ход — проигрывает. Кто из ребят может играть так, чтобы всегда выигрывать, как бы ни играл соперник?

7. Докажите, что из 25 попарно различных натуральных чисел можно выбрать два таких, сумма и разность которых не совпадает ни с одним из 23 оставшихся. (Разность всегда берется положительная).

8. На лист бумаги выписали натуральное число N. Петя и Вася играет в следующую игру. За один ход можно либо уменьшить число на 1, либо заменить число на один из его делителей, отличных от 1 и самого числа. При этом число на доске всегда должно оставаться натуральным. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Начинает Петя. При каких N он гарантированно может выиграть?