

По мотивам УТЮМа

1. На доске написано конечное количество различных неотрицательных чисел. Оказалось, что произведение любых двух выписанных чисел также есть на этой доске. Какое наибольшее количество чисел может быть написано?
2. У Нади есть M карточек. На каждой стороне каждой карточки Надя написала натуральное число, меньшее 1000. Оказалось, что для любых двух различных натуральных чисел x , y , меньших 1000, можно предъявить две карточки, что на одной из них написано число x , а на второй — число y . При каком наименьшем M такое могло случиться?
3. В таблице 10×10 строки пронумерованы десятью различными натуральными числами из промежутка от 1 до 20, а столбцы — остальными десятью числами из этого же промежутка. В каждую клетку записали произведение номера столбца и строки, на пересечении которых она находится. Найдите наибольшую возможную сумму всех чисел в таблице.
4. Про натуральные числа a , b , c известно, что

$$\text{НОД}(a, b) + \text{НОД}(a, c) + \text{НОД}(b, c) = \frac{a + b + c}{2}.$$

Докажите, что одно из трёх чисел делится на другое.

5. Даны 100 различных действительных чисел. Докажите, что их можно расставить в клетках таблицы 10×10 так, чтобы ни у каких двух чисел, стоящих в соседних по стороне или углу ячейках, разность не была равна 1.
6. Найдите значение выражения

$$\left[\frac{100^{101} + 101^{102} + \dots + 2023^{2024}}{100^{100} + 101^{101} + \dots + 2023^{2023}} \right].$$

Через $[x]$ обозначена целая часть x , то есть наибольшее целое число, не превосходящее x .

7. Петя и Вася играют в игру. Изначально по кругу расставлено 200 точек. Ребята по очереди (начинает Петя) соединяют точки отрезками своего цвета: Петя — синим, Вася — красным. Если две точки уже соединены отрезком, больше их соединять отрезком нельзя. Петя выигрывает, если появятся такие четыре точки, что все шесть соединяющих их отрезков синие. Может ли Вася ему помешать?
8. Дан клетчатый квадрат 101×101 . Внутри него выбирается квадрат 100×100 . Внутри этого квадрата выбирается квадрат 99×99 , и так далее, пока не будет выбран квадрат 1×1 . Оказалось, что выбранный квадрат 1×1 совпадает с центральной клеткой исходного квадрата 101×101 . Сколько существует таких последовательностей квадратов? Ответ не должен содержать знака многоточия.