Аликвотные дроби

Дроби вида $\frac{1}{n}$, где n – натуральное число, называются *аликвотными*.

1. Придумайте разложение аликвотной дроби $\frac{1}{n}$, где $n > 1$ в сумму двух различных меньших аликвотных дробей.

2. При каких n число $\frac{9}{20}$ представляется в виде суммы n различных аликвотных дробей?

3. Вычислите сумму
$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{99 \cdot 100}.$$

4. В клубе перфекционистов n человек. На праздник они заказали n одинаковых тортов, однако, один торт не довезли. При каком наибольшем n они смогут разрезать оставшиеся торты (каждый на несколько равных кусков) так, чтобы все члены клуба смогли получить одинаковый набор из трех кусков?

5. Пусть p — простое число. Назовем дробь *хорошей*, если она представляется в виде суммы двух различных аликвотных дробей. Докажите, что:
(а) Дробь $\frac{p-1}{p}$ хорошая только при $p < 5$;
(б) Дробь $\frac{1}{p}$ хорошая при любом p, причём соответствующее представление единственно;
(в) Правильная дробь $\frac{m}{p}$ хорошая тогда и только тогда, когда $p + 1$ делится на m.

6. Сумма восьми аликвотных дробей равна 1. Может ли при этом одна из дробей быть меньше $\frac{1}{10^{24}}$?

7. Сумма 100 обратных величин попарно различных натуральных чисел равна 1. Могут ли все эти числа быть меньше 10000?

8. Докажите, что любая положительная дробь $\frac{a}{b}$ может быть представлена в виде суммы нескольких попарно различных дробей вида $\frac{1}{n}$.

9. Докажите, что любая правильная дробь может быть представлена в виде суммы
$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 a_2} + \cdots + \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n},$$
где $2 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$ – натуральные числа. Например, $\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 3}$.