

Выигрышные и проигрышные позиции. Передача хода

1. Фишка стоит на поле $a1$ шахматной доски. За ход разрешается сдвинуть её на одну клетку вправо, или на одну клетку вверх, или на две клетки по диагонали вправо-вверх. Тот, кто поставит фишку на клетку $h8$, выигрывает. Кто выигрывает при правильной игре?
2. Игра начинается с числа 60. За ход разрешается уменьшить имеющееся число на любой из его делителей, меньший самого числа. Проигрывает тот, кто получит 1. Кто выигрывает при правильной игре?
3. Имеется шоколадка $m \times n$. За один ход можно съесть дольку, а также все дольки, которые находятся выше, правее, а также выше и правее выбранной. Проигрывает тот, кто откусывает последнюю дольку. Кто выигрывает при правильной игре?
4. На доске написаны натуральные числа от 1 до 2022. За один ход игрок может выбрать любое число n из написанных и стереть все написанные числа, на которые n делится (в том числе само число n). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Докажите, что у первого игрока есть выигрышная стратегия.
5. На доске написано число 2. За один ход разрешается прибавить к уже имеющемуся числу любой его делитель, отличный от самого числа. Проигрывает тот, кто первым получит число, большее 2022. Кто выигрывает при правильной игре?
6. На доске записано целое положительное число $N > 200000$. Двое ходят по очереди. За один ход разрешается уменьшить записанное число либо на число, кратное 100, либо на любое простое число, меньшее 100 (при этом результат не должен быть отрицательным). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Докажите, что у первого игрока есть выигрышная стратегия.
7. На листе бумаги написано число 1. Петя и Вася по очереди выписывают на лист целые числа от 2 до 1000 по следующему правилу: если на листе уже есть число n , то разрешается дописать $n + 1$ или $2n$ (если это число не превосходит 1000). При этом два раза писать одно и то же число нельзя. Тот, кто напишет число 1000, побеждает. Начинает Петя. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?
8. Петя и Вася играют в следующую игру. У них есть клетчатый прямоугольник $m \times n$. Первым ходит Петя. Своим ходом первый игрок делит прямоугольник на два меньших одним разрезом вдоль линии сетки. Затем второй игрок выбирает один из двух получившихся прямоугольников, на котором будет продолжаться игра (второй прямоугольник отбрасывается), и делит его на два меньших. Потом опять первый выбирает прямоугольник, на котором будет продолжаться игра, и т. д. Проигрывает тот, кто не может в свой ход разрезать прямоугольник. Найдите все пары натуральных чисел m и n , для которых у Васи есть выигрышная стратегия.