Остатки и циклы

1. Докажите, что первое января может быть любым днём недели.

2. **(а)** Докажите, что для любого нечётного числа m найдётся остаток (при этом ровно один!), который при умножении на 2 даёт число с остатком 1 при делении на m.
(б) Дано натуральное число a. Определим последовательность x_n как

$$x_0 = a,\ x_n = 2 \cdot x_{n-1} + a.$$

Докажите, что для любого нечётного m найдётся бесконечно много кратных m элементов последовательности.

3. Докажите, что число $2^{n!}$ даёт остаток 1 при делении на любое нечётное $m \leqslant n$.

4. В строку выписаны натуральные числа. Известно, что каждое число, начиная с третьего, равно сумме двух предшествующих. Десятое число в ряду равно 2021. Может ли оказаться, что сороковое число равно 1000000?

5. Докажите, что любая обыкновенная дробь представляется в виде периодической десятичной дроби.

6. Назовём характеристикой числа n последнюю цифру числа $3n$. Петя записал на доску 225 натуральных чисел, не все из которых равны. Затем Вася записал на доску характеристику каждого из выписанных чисел. Оказалось, что Петя и Вася выписали на доску один и тот же набор чисел. Докажите, что произведение чисел на доске делится на 225.

7. Бесконечная клетчатая плоскость раскрашена в 64 цвета следующим образом: если клетка покрашена к какой-то цвет, то клетки, отстоящие от неё на 8 клеток влево, вправо, вверх и вниз, тоже покрашены в этот цвет. В одной из клеток стоит *a-b-конь* — фигура, которая умеет за один ход сдвигаться на a клеток вниз и на b клеток вправо. Игорь не знает чему равны a и b, но хочет назвать такое $n > 1$, что через n ходов a-b-конь окажется на клетке того же цвета, что и изначальная. Какое наименьшее число может назвать Игорь?

8. Петя записал на доску числа от 1 до 256. Затем Вася поставил стрелочку от каждого числа a к остатку при делении на 257 числа $2a$.
(а) Докажите, что при этом все числа разбились на циклы равной длины.
(б) Докажите, что 2^{256} даёт остаток 1 при делении на 257.