Зацикливание

1. В некоторой стране стали очень популярны путешествия. При этом часть авиарейсов прекратило свою работу так, что оказалось, что теперь из каждого города ведёт ровно один односторонний маршрут в другой город. При этом в каждый город ведёт не более одного маршрута. Докажите, что турист, выехавший из столицы, когда-нибудь в неё вернётся.

2. В стране 16 городов, некоторые из них соединены дорогой с односторонним движением, в каждый город ровно одна дорога входит и из каждого города ровно одна дорога выходит. В каждом городе находится по автомобилисту. Каждый день каждый автомобилист проезжает одну дорогу. Найдите наименьшее натуральное N такое, что ровно через N дней все автомобилисты будут в тех городах, из которых начинали движение, вне зависимости от того, как именно проложены дороги.

3. Метеорологическая служба Цветочного города следит за погодой уже сто лет. Они подразделяют погоду на дождливую или солнечную. Метеорологи доказали, что погода на следующий день однозначно определяется (по какому-то загадочному принципу) погодой в предыдущие семь дней. Последняя неделя в Цветочном городе была полностью солнечная. Докажите, что в будущем снова встретится полностью солнечная неделя.

4. Напишем последовательность 2, 0, 2, 3, 7, 2, 4, 6, ..., в которой каждый новый член равен последней цифре суммы четырёх предыдущих. Докажите, что рано или поздно в последовательности встретится кусок

(а) 2, 0, 2, 3; **(б)** 4, 8, 1, 9.

(в) Докажите, что количество членов последовательности между повторяющимися кусками 2, 0, 2, 3 (считая первый кусок 2, 0, 2, 3 и не считая второй) делится на 5.

(г) Докажите, что кусок 2, 0, 2, 3 встретится не позже чем через 5^5 членов в последовательности.

5. Кубик Рубика вывели из исходного состояния некоторой последовательностью поворотов граней. Докажите, что если повторять эту последовательность поворотов достаточно долго, то кубик в конце концов вернется в исходное состояние.

6. Дана последовательность чисел Фибоначчи: $F_1 = 1, F_2 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ для всех натуральных n. Докажите, что существует число Фибоначчи, делящееся на 2022.

7. В Тридесятом Королевстве у каждого замка и каждой развилки сходятся три дороги. Рыцарь, Любящий Разнообразие, выехал из своего замка и по очереди поворачивает то направо, то налево. Докажите, рыцарь вернётся в изначальный город.

8. По кругу стоят несколько коробочек. Каждая из них может быть пустой или содержать один или несколько шариков. Сначала из какой-то коробочки берутся все шарики и раскладываются по одному по часовой стрелке, начиная со следующей коробочки. На следующем ходу раскладывают шарики из той коробочки, в которую попал последний шарик на предыдущем ходу, и т. д. Докажите, что в какой-то момент повторится начальное расположение шариков.