

Числовой разницей

1. На доске написаны числа $1, 2, 3, \dots, 99$. Андрей обвёл некоторые 50 чисел так, чтобы никакие два обведённых числа не давали в сумме ни 100, ни 101. Чему может быть равна сумма обведённых чисел?
2. В клетках квадрата 100×100 расставлены натуральные числа. Докажите, что можно найти квадрат со стороной больше 10, в котором сумма чисел чётна.
3. Какое наибольшее количество из чисел $1, 2, \dots, 300$ можно расставить в ряд таким образом, чтобы сумма любых четырёх подряд не делилась на 3, а сумма любых пяти подряд делилась на 3?
4. Даны два числа, которые получаются друг из друга перестановкой цифр. Может ли сумма этих чисел быть равной $\underbrace{99 \dots 9}_{2023}$?
5. Остатки от деления некоторого натурального числа на $7, 8, 9, \dots, 14$ выписали в строчку. Оказалось, что каждое число, начиная со второго, больше предыдущего. Докажите, что в строчке записаны 8 последовательных чисел.
6. Трёхзначное число, в записи которого нет нулей, умножают на сумму обратных величин к его цифрам. Докажите, что результат больше 135. Напомним, что обратным к ненулевому числу n называется число $\frac{1}{n}$.
7. Произвольный набор из четырех натуральных чисел выписан в строку. Под каждым числом записывается разность между этим числом и следующим в строке (для последнего – разность между ним и первым; если числа не равны, то всегда из большего вычитается меньшее). По тем же правилам под второй строкой записывается третья и так далее. Докажите, что, рано или поздно, появится строка из четырех нулей.
8. В таблице 10×10 расставлены числа от 1 до 100 : в первой строчке слева направо $1, 2, 3, \dots, 10$, во второй строчке $11, 12, 13, \dots, 20$ и так далее, в последней строчке $91, 92, 93, \dots, 100$. Лёша покрыл таблицу 50 горизонтальными доминошками, для каждой доминошки посчитал произведение чисел, покрытых ей, и сложил 50 полученных результатов. А Витя покрыл таблицу 50 вертикальными доминошками и сделал то же самое. У кого сумма получилась больше?
9. В ряд стоят 10 положительных чисел (не обязательно целых), любые два соседних отличаются на 1. При этом, все эти числа можно разбить на две группы с одинаковой суммой. Найдите наименьшее возможное число, которое может оказаться в таком ряду.