Инвариант

1. На доске записаны все натуральные числа от 1 до 2022. Каждую минуту Игорь заменяет каждое из чисел на доске на сумму его цифр. Через несколько минут все числа стали однозначными. Каких чисел больше — пятёрочек или восьмёрочек?

2. На хоккейной площадке лежат три шайбы, пронумерованные числами 1, 2, 3. Хоккеист Ваня выбирает какую-то из них и бьет по ней так, что она пролетает между двумя другими. Он делает такие удары снова и снова. Может ли так оказаться, что после 2023 ударов каждая шайба лежит на своем первоначальном месте?

3. В каждой клетке таблицы $n \times n$ стоит либо «+» либо «−». Разрешается выбрать произвольную клетку и поменять знаки в столбце и строке, содержащих ее (при этом знак в самой клетке тоже меняется). Найдите все n, при которых из любого изначального расположения знаков можно получить таблицу, заполненную плюсами.

4. На доске записано несколько натуральных чисел. Каждую минуту Леша стирает с доски какие-то два числа и записывает вместо них их наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Докажите, что когда-нибудь числа на доске перестанут меняться.

5. В каждой вершине правильного 2022-угольника стоит фишка. Разрешается за один ход сдвинуть любые две фишки в соседние с ними вершины. Можно ли с помощью таких операций собрать все фишки в одной вершине?

6. Дно прямоугольной коробки было выложено плитками размерами 2×2 и 1×4. Плитки высыпали из коробки и при этом потеряли одну плитку 2×2. Вместо неё удалось достать плитку 1×4. Докажите, что теперь выложить дно коробки плитками не удастся.

7. На прямой стоят две фишки: слева красная справа синяя. Разрешается производить любую из двух операций: вставку двух фишек одного цвета подряд (между фишками или с краю) и удаление пары соседних одноцветных фишек (между которыми нет других фишек). Можно ли с помощью таких операций оставить на прямой ровно две фишки: слева синюю, а справа красную?

8. На доске 15×15 стоят 15 не бьющих друг друга ладей. Каждую ладью передвинули ходом коня 15 раз. Докажите, что теперь какие-то две ладьи бьют друг друга.

9. Четыре кузнечика сидят в вершинах квадрата. Каждую минуту один из них прыгает в точку, симметричную ему относительно другого кузнечика. Докажите, что кузнечики не могут в некоторый момент оказаться в вершинах квадрата большего размера.