Комбинаторный разнобой

1. В ряд выложены апельсины, бананы, яблоки и груши так, что все четыре вида фруктов представлены, и представители любых двух видов где-то лежат рядом. Какое наименьшее количество фруктов могло быть выложено?

2. У сороконожки есть 40 одинаковых носков и 40 одинаковых ботинок. Она может надевать их в любом порядке с одним лишь условием: на каждую ногу надо сначала надеть носок, а только потом ботинок. Сколькими способами она может обуться?

3. На шахматной доске стояли 16 королей, причём каждый из них бил хотя бы одного другого короля. Некоторых королей сняли с доски. Оказалось, что никакие два из оставшихся королей не бьют друг друга. Какое наименьшее количество королей могли убрать?

4. Можно ли клетчатую доску 21×21 с вырезанными угловыми и центральной клетками разрезать на «доминошки» из двух клеток и «кресты» из пяти клеток?

5. Для какого наименьшего n на доске 10×10 можно расставить прямоугольники $1 \times 1, 1 \times 2, \ldots, 1 \times n$ (возможно, повёрнутые на $90°$) так, чтобы на доске не осталось места для прямоугольника $1 \times (n+1)$?

6. На изначально белой доске 5×5 Петя последовательно закрашивает клетки в чёрный цвет. Внутри каждой только что закрашенной клетки он пишет число, равное количеству соседних по стороне с ней клеток чёрного цвета в этот момент. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех выписанных чисел?

7. У лаборанта 27 гирек. Масса каждой — целое число граммов (возможно, отрицательное). Оказалось, что если отложить любую гирю, то остальные гири можно разделить на две равные группы по 13 гирь с равными массами. Докажите, что массы всех гирь равны.

8. На шахматную доску поставили 4 королей, не бьющих друг друга. Какое наибольшее количество королей ещё можно гарантированно поставить на доску так, чтобы все поставленные короли не били друг друга?