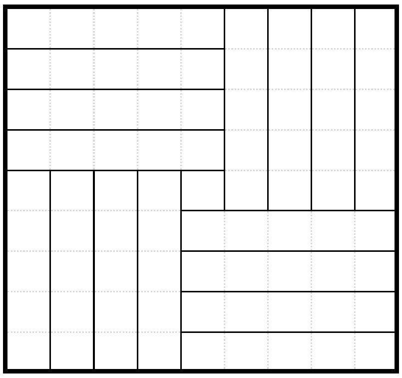
Диагностическая работа. Очный этап, первый тур

1. В каждой клетке таблицы 9×9 написано целое число. Ваня заметил, что если сложить все числа в любых пяти клетках, образующих прямоугольник 1×5 или 5×1, то получится 11. Найдите число в центре таблицы, если сумма всех чисел в таблице равна 200.

Ответ: 24.

Решение. Выделим в таблице 16 прямоугольников 1×5, как показано на рисунке.



Сумма чисел в прямоугольниках равна $11 \cdot 16 = 176$. Тогда в центральной клетке стоит число $200 - 176 = 24$.

Замечание. Приведём пример такой расстановки чисел (хотя для верного решения это и не требуется).

24	-13	0	0	0	24	-13	0	0
0	24	-13	0	0	0	24	-13	0
0	0	24	-13	0	0	0	24	-13
0	0	0	24	-13	0	0	0	24
-13	0	0	0	24	-13	0	0	0
24	-13	0	0	0	24	-13	0	0
0	24	-13	0	0	0	24	-13	0
0	0	24	-13	0	0	0	24	-13
0	0	0	24	-13	0	0	0	24

2. Андрей и Таня — брат и сестра. Однажды у них произошёл следующий диалог:

Андрей: «У меня ровно 1 сестра».
Таня: «У меня ровно 2 сестры».
Андрей: «У меня ровно 3 сестры».
…
Андрей: «У меня ровно 9 сестёр».
Таня: «У меня ровно 10 сестёр».

Сколько девочек могло быть в их семье, если среди прозвучавших 10 фраз было нечётное количество ложных?

Ответ: 1 сестра или 11 сестёр.

Решение. Допустим в семье n девочек, включая Таню. Тогда у Андрея n сестёр, а у Тани $n-1$ сестра.

- Если n чётно, то у Андрея чётное число сестёр, а у Тани — нечётное. Поэтому все 10 произнесённых фраз ложны. Но ложных фраз должно быть нечётное число, противоречие.
- Если n больше 11, то количество сестёр и у Андрей, и у Тани больше 10, то есть опять все фразы ложны, противоречие.
- Если n равно 3, 5, 7 или 9, то Андрей произнёс одну верную фразу. Но Таня тоже сказала одну верную фразу, так как $n-1$ в этих случаях будет равно 2, 4, 6 или 8 соответственно. Таким образом, ложных фраз было произнесено 8, противоречие.
- Если $n = 1$, то Андрей произнёс верную фразу «У меня ровно 1 сестра», а все фразы Тани ложные. Таким образом, в этом случае ложны ровно 9 сказанных фраз, поэтому $n = 1$ подходит.
- Если $n = 11$, то Таня произнесла верную фразу «У меня ровно 10 сестёр», а все фразы Андрея ложные. Таким образом, в этом случае ложны ровно 9 сказанных фраз, поэтому $n = 11$ подходит.

3. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать из набора 1, 2, 3, …, 15 так, чтобы сумма любых двух различных выбранных чисел была составным числом?

Ответ: 8 чисел.

Решение. Если выбрать восемь нечётных чисел, то сумма любых двух из них будет чётным числом, большим 2, то есть составным числом.

Докажем, что больше восьми чисел выбрать не получится. Для рассмотрим семь пар чисел: 2 и 15, 3 и 14, …, 8 и 9. Из каждой пары можно выбрать не более одного числа, потому что сумма чисел в паре равна 17 — простому числу. То есть всего можно выбрать не больше восьми чисел — 1 и не более чем по одному числу из каждой пары.

4. Лёша и Серёжа играют в игру на белой клетчатой доске 14×343. Они делают ходы по очереди, первым ходит Лёша. За ход нужно перекрасить любую белую клетку в синий цвет. Выигрывает тот игрок, после хода которого образуются 7 синих клеток подряд по вертикали или по горизонтали. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл его соперник?

Ответ: Серёжа.

Решение. Разобьём строки таблицы на пары: первая и восьмая, вторая и девятая и т. д. Клетки в парных строках тоже разобьём на пары: пусть пару образуют клетки в парных строках, которые лежат в одном столбце (например, верхней левой клетке будет соответствовать клетка в восьмой строке в первом столбце).

Опишем выигрышную стратегию Серёжи. Если в какой-то момент он видит, что может выиграть одним ходом, то он так и поступит. В противном случае он должен сделать ход в клетку, парную той, куда только что сходил Лёша.

Покажем, что придерживаясь этой стратегии, Серёжа победит. Предположим, игра закончилась, когда один из игроков получил 7 закрашенных клеток по горизонтали. Заметим, что после каждого хода Серёжи парные строки заполнены одинаково. Поэтому горизонтальная предвыигрышная позиция — 7 клеток подряд по горизонтали, среди которых 6 клеток закрашены, — впервые может получиться только после хода Лёши, и если это случилось, то Серёжа выиграл.

Предположим, игра закончилась, когда один из игроков получил 7 закрашенных клеток в некотором столбце. Назовем этот столбец *финальным*. Заметим, что любое положение 7 клеток подряд по вертикали задевает по одной клетке из каждой пары. Значит, перед последним ходом хотя бы один из игроков покрасил в финальном столбце 6 клеток. Если Серёжа действует по выбранной стратегии, то первым шесть ходов в финальный столбец сделает Лёша. Тогда после хода Лёши в финальном столбце закрашено 11 клеток. Следовательно, в одной из семиклеточных половин закрашено 6 клеток, и Серёжа следующим ходом выигрывает, покрасив седьмую клетку в этой половине (как того и требует стратегия). Таким образом, Серёжа победит.

5. У Пети и Васи есть несколько гирек, каждая весит целое число граммов. Суммарный вес всех гирек Пети в 13 раз больше суммарного веса всех гирек Васи. Петя выбрал среди своих гирек самую лёгкую и отдал её Васе. В итоге суммарный вес его гирек оказался в 8 раз больше суммарного веса гирек Васи. Какое наибольшее количество гирек могло изначально быть у Пети?

Ответ: 23 гирьки.

Решение. Пусть гирьки Васи изначально суммарно весили S граммов, а самая лёгкая гирька Пети весила n граммов. Тогда изначально гирьки Пети весили $13S$. После того, как Петя отдал самую лёгкую гирьку Васе, суммарный вес Васиных гирек стал равен $S+n$, а Петиных — $13S-n$. Следовательно,

$$8(S+n) = 13S - n \;\Leftrightarrow\; n = \frac{5S}{9}\,.$$

Поскольку изначальный вес Петиных гирек равен $13S$, а самая лёгкая гирька весит $\frac{5S}{9}$, то гирек не больше чем

$$\frac{13S}{\frac{5S}{9}} = \frac{13\cdot 9}{5} = \frac{117}{5} = 23{,}4.$$

Так как количество гирек — это натуральное число, то их не больше 23.

Приведём пример, когда у Васи изначально было ровно 23 гирьки. Пусть у Васи была одна гирька весом 9 грамм, а у Пети — двадцать две гирьки весом 5 граммов и одна гирька весом 7 граммов. Тогда изначально суммарный вес Петиных гирек равен 117, что в 13 раз больше суммарного веса Васиных гирек. После того, как Петя отдаст Васе гирьку весом 5 граммов, у него останется гирьки суммарным весом 112, что в 8 раз больше веса гирек Васи, который равен $9+5=14$.

Диагностическая работа. Очный этап, второй тур

1. По кругу стояли 45 детей, у каждого из них было несколько шоколадных и несколько мармеладных конфет (у разных детей могло быть разное количество конфет). Одновременно каждый из них дал одну конфету своему соседу справа по часовой стрелке. Обязательно ли найдётся ребёнок, у которого количество шоколадных конфет не изменилось? (Дети конфеты не ели.)

Ответ: обязательно.

Решение. Рассмотрим произвольного ребёнка. Чтобы количество шоколадных конфет у него изменилось, он должен либо отдать шоколадную, а получить мармеладную конфету, либо наоборот отдать мармеладную, а получить шоколадную конфету. Назовём ребёнка *шоколадным*, если он отдал шоколадную конфету, а получил мармеладную, и *мармеладным*, если он отдал мармеладную конфету, а получил шоколадную.

Допустим, искомого ребёнка не найдётся. Тогда каждый ребёнок в кругу либо шоколадный, либо мармеладный. Поскольку шоколадный ребёнок отдал шоколадную конфету, то следующий за ним по часовой стрелке ребёнок должен отдать мармеладную конфету, то есть быть мармеладным. Аналогично после мармеладного ребёнка должен идти шоколадный. Но тогда шоколадные и мармеладные дети должны чередоваться, поэтому их должно быть чётное количество. Однако их 45, противоречие. Следовательно, найдётся ребёнок, у которого количество шоколадных конфет не изменилось.

2. Если в компьютер вставить карточку с ненулевым числом a, а затем карточку с ненулевым числом b, то он вернёт обе эти карточки, а также выдаст новую карточку с числом $1-\frac{a}{b}$. Можно ли, имея карточки с числами 1 и 10, получить карточку с числом 1000?

Ответ: можно.

Решение. Допустим, есть карточки с числами 1 и $n \neq 1$. Применим операции к следующим парам чисел:

$$\begin{aligned} 1 \text{ и } n: &\quad 1-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n};\\ n \text{ и } 1: &\quad 1-\frac{n}{1}=1-n;\\ 1-n \text{ и } \frac{n-1}{n}: &\quad 1-\frac{1-n}{\frac{n-1}{n}}=n+1. \end{aligned}$$

Таким образом, если есть карточка n, то за 3 операции можно получить карточку $n+1$. Тогда можно последовательно получить карточки с числами 11, 12, …, 1000.

3. В классе 13 мальчиков, все разного роста. Учитель физкультуры попросил их всех встать в ряд так, чтобы ни один из них не оказался рядом с двумя более низкими мальчиками. Сколькими способами они могут это сделать?

Ответ: 2^{12}.

Решение. Рассмотрим самого высокого мальчика в классе. Заметим, что он может стоять только с краю, потому что если он стоит не с краю, то он выше своих соседей. Временно забудем про него. Оставшиеся 12 мальчиков стоят подряд. Рассмотрим самого высокого из них. Он также должен стоять с краю. Также временно забудем про него. Продолжим так делать, пока не останется самый низкий мальчик.

Начнём теперь последовательно выставлять мальчиков обратно в порядке увеличения роста. Каждого мальчика можно выставить двумя способами, поэтому общее количество способов выставить мальчиков равно 2^{12}.

4. Пусть N — натуральное число, и $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_{k-2} < d_{k-1} < d_k = N$ — все натуральные делители числа N. Найдите наибольшее возможное значение N, если $d_{k-2} = 21d_2$.

Ответ: 441.

Решение. Второй делитель с начала — это наименьший простой делитель числа N, обозначим его p. Третий делитель с начала — это либо p^2, либо второй по величине простой делитель числа N, обозначим его q.

Случай 1. Третий делитель с начала — это p^2. Тогда третий делитель с конца — это $\frac{N}{p^2}$. По условию задачи

$$\frac{N}{p^2} = 21p \;\Leftrightarrow\; N = 21p^3.$$

Видно, что 3 и 7 — делители числа N, поэтому $p \leqslant 3$. Если $p = 2$, то третий по величине делитель числа N равен 3; если же $p = 3$, то третий по величине делитель числа N не больше 7, т. е. не 3^2. Противоречие.

Случай 2. Третий делитель с начала — это q. Тогда третий делитель с конца — это $\frac{N}{q}$. По условию задачи

$$\frac{N}{q} = 21p \;\Leftrightarrow\; N = 21pq.$$

Видно, что 3 и 7 — делители числа N, поэтому $p \leqslant 3$, $q \leqslant 7$. Отсюда получаем, что $N \leqslant 441$. Несложно проверить, что это число удовлетворяет условию.

5. Каждую клетку таблицы 10×10 покрасили в какой-то цвет. Известно, что:

- нет строки, в которой встречаются хотя бы 4 различных цвета,
- нет столбца, в котором встречаются хотя бы 4 различных цвета.

Какое наибольшее количество цветов могло присутствовать в раскраске?

Ответ: 21.

Решение. Докажем, что цветов не может быть более 21.

Предположим, что в каждой строке использовано не более двух цветов. Тогда всего в таблице использовано не более $2 \cdot 10 < 21$ цветов.

Теперь допустим, что в некоторой строке использовано ровно 3 цвета; назовём их *первичными* цветами.

Если при этом в каждой из остальных строк не более двух не первичных цветов, то всего цветов не более $3 + 2 \cdot 9 = 21$.

Пусть тогда найдётся строка, в которой три не первичных цвета; назовём их *вторичными* цветами. В этом случае в каждом столбце уже есть первичный и вторичный цвет, поэтому в нём не более одного цвета, отличающегося от первичных и вторичных. Тогда во всей таблице цветов не более $3 + 3 + 10 = 16$.

Теперь приведём пример, когда клетки покрашены в 21 цвет. Расположим 10 разных цветов на диагонали, и ещё 10 разных цветов на клетках непосредственно над диагональю (при этом считаем, что таблица «зацикливается»); остальные клетки зальём ещё одним цветом.

								20	19
							18	17	
						16	15		
					14	13			
				12	11				
			10	9					
		8	7						
	6	5							
4	3								
1									2