Диагностическая работа. Дистанционный этап. Решения

1.1. Сколько существует натуральных чисел n, не превосходящих 2022, таких, что $(n+1)(n+2)(n+3)$ делится на 343?

Ответ: 15.

Решение. Поскольку $343 = 7^3$ и из трёх последовательных натуральных чисел не более чем одно делится на 7, то одно из чисел $n+1$, $n+2$, $n+3$ должно делиться на 343. Существует пять чисел, которые не превосходят 2022 и делятся на 7^3: 343, 686, 1029, 1372, 1715. Приравнивая каждое из этих чисел к каждому из выражений $n+1$, $n+2$, $n+3$, получим 15 возможных значений n.

1.2. Сколько существует натуральных чисел n, не превосходящих 3000, таких, что $(n+1)(n+2)(n+3)$ делится на 343?

Ответ: 24.

1.3. Сколько существует натуральных чисел n, не превосходящих 4000, таких, что $(n+1)(n+2)(n+3)$ делится на 343?

Ответ: 33.

1.4. Сколько существует натуральных чисел n, не превосходящих 1234, таких, что $(n+1)(n+2)(n+3)$ делится на 343?

Ответ: 9.

2.1. На заводе производят N видов мороженого. На дегустацию пришли 7 детей, каждый из них попробовал 7 видов мороженого. При этом каждый ребёнок попробовал ровно 4 вида, которые не пробовал никто другой, а каждый из оставшихся 3 видов попробовал кто-то ещё. Какое наибольшее значение может принимать N, если каждый вид мороженого попробовал хотя бы один ребёнок?

Ответ: 38.

Решение. Каждый ребёнок попробовал 4 вида мороженого, которые не пробовал никто другой, то есть всего таких видов $4 \cdot 7 = 28$. Среди оставшихся $3 \cdot 7 = 21$ порций мороженого, которые съели школьники, каждый вид представлен хотя бы в двух экземплярах, поэтому всего видов не больше 10. Несложно привести пример, когда видов ровно 10. Поэтому наименьшее значение N равно $28 + 10 = 38$.

2.2. На заводе производят N видов мороженого. На дегустацию пришли 9 детей, каждый из них попробовал 9 видов мороженого. При этом каждый ребёнок попробовал ровно 6 видов, которые не пробовал никто другой, а каждый из оставшихся 3 видов попробовал кто-то ещё. Какое наибольшее значение может принимать N, если каждый вид мороженого попробовал хотя бы один ребёнок?

Ответ: 67.

2.3. На заводе производят N видов мороженого. На дегустацию пришли 7 детей, каждый из них попробовал 9 видов мороженого. При этом каждый ребёнок попробовал ровно 6 видов, которые не пробовал никто другой, а каждый из оставшихся 3 видов попробовал кто-то ещё. Какое наибольшее значение может принимать N, если каждый вид мороженого попробовал хотя бы один ребёнок?

Ответ: 52.

2.4. На заводе производят N видов мороженого. На дегустацию пришли 9 детей, каждый из них попробовал 7 видов мороженого. При этом каждый ребёнок попробовал ровно 4 вида, которые не пробовал никто другой, а каждый из оставшихся 3 видов попробовал кто-то ещё. Какое наибольшее значение может принимать N, если каждый вид мороженого попробовал хотя бы один ребёнок?

Ответ: 49.

3.1. Алёна вписывает цифры в клетки прямоугольной таблицы, в каждую клетку она вписывает не более одной цифры. Если она впишет 30 цифр, то обязательно найдётся строка, в которой будет записано хотя бы 3 цифры. Если она впишет 15 цифр, то обязательно найдётся столбец, в котором будет записано хотя бы 4 цифры. Какое наибольшее количество клеток может быть в таблице?

Ответ: 56.

Решение. Если в таблице будет хотя бы 15 строк, то Алёна может вписать в каждую строку по 2 цифры. Значит, строк не больше 14. Если строк 14, то условие про строки будет выполнено. Действительно, если в каждой строке будет записано не больше 2 цифр, то всего цифр будет не больше 28, противоречие.

Аналогично наибольшее количество столбцов равно 4. Следовательно, наибольшее количество клеток в таблице равно $14 \cdot 4 = 56$.

3.2. Алёна вписывает цифры в клетки прямоугольной таблицы, в каждую клетку она вписывает не более одной цифры. Если она впишет 29 цифр, то обязательно найдётся строка, в которой будет записано хотя бы 4 цифры. Если она впишет 22 цифры, то обязательно найдётся столбец, в котором будет записано хотя бы 5 цифр. Какое наибольшее количество клеток может быть в таблице?

Ответ: 45.

3.3. Алёна вписывает цифры в клетки прямоугольной таблицы, в каждую клетку она вписывает не более одной цифры. Если она впишет 31 цифру, то обязательно найдётся строка, в которой будет записано хотя бы 5 цифр. Если она впишет 20 цифр, то обязательно найдётся столбец, в котором будет записано хотя бы 3 цифры. Какое наибольшее количество клеток может быть в таблице?

Ответ: 63.

3.4. Алёна вписывает цифры в клетки прямоугольной таблицы, в каждую клетку она вписывает не более одной цифры. Если она впишет 39 цифр, то обязательно найдётся строка, в которой будет записано хотя бы 7 цифр. Если она впишет 26 цифр, то обязательно найдётся столбец, в котором будет записано хотя бы 4 цифры. Какое наибольшее количество клеток может быть в таблице?

Ответ: 48.

4.1. В магазине в наличии есть арбузы и дыни. Сегодня привезли новые арбузы и дыни, а часть арбузов и дынь купили. В результате общее число арбузов и дынь сократилось на 10%, а доля арбузов увеличилась с 55% до 65%. Какое наименьшее количество арбузов могло остаться?

Ответ: 117.

Решение. Обозначим через S суммарное количество арбузов и дынь, которое было в магазине в начале дня. К концу дня суммарное число арбузов и дынь сократилось на 10%, а доля арбузов среди них стала составлять 65%, поэтому к концу дня арбузов было

$$0{,}9 \cdot 0{,}65 \cdot S = \frac{9 \cdot 13}{200} \cdot S = \frac{117}{200} \cdot S.$$

Наименьшее значение S, при котором значение этого выражения целое, равно 200. В этом случае осталось 117 арбузов. Так как чем меньше S, тем меньше $\frac{117}{200} \cdot S$, то при $S = 200$ достигается минимум количества арбузов.

Несложно проверить, что при $S = 200$ количества дынь и арбузов в начале и в конце дня являются целыми числами, поэтому это значение подходит.

4.2. В магазине в наличии есть арбузы и дыни. Сегодня привезли новые арбузы и дыни, а часть арбузов и дынь купили. В результате общее число арбузов и дынь увеличилось на 10%, а доля арбузов уменьшилась с 55% до 45%. Какое наименьшее количество арбузов могло остаться?

Ответ: 99.

4.3. В магазине в наличии есть арбузы и дыни. Сегодня привезли новые арбузы и дыни, а часть арбузов и дынь купили. В результате общее число арбузов и дынь сократилось на 10%, а доля арбузов уменьшилась с 55% до 45%. Какое наименьшее количество арбузов могло остаться?

Ответ: 81.

4.4. В магазине в наличии есть арбузы и дыни. Сегодня привезли новые арбузы и дыни, а часть арбузов и дынь купили. В результате общее число арбузов и дынь увеличилось на 10%, а доля арбузов увеличилась с 55% до 65%. Какое наименьшее количество арбузов могло остаться?

Ответ: 143.

5.1. Лёша разбил прямоугольник на девять меньших прямоугольников. Внутри каждого из этих прямоугольников Лёша записал число, равное его периметру, как изображено на рисунке.

Известно, что у восьми прямоугольников Лёша посчитал периметры правильно, а у одного прямоугольника — неправильно. Выберите на рисунке прямоугольник, периметр которого посчитан неверно, и найдите, чему на самом деле равен его периметр.

12	16	14
16	12	10
10	14	12

Ответ: левый средний, настоящий периметр 8.

Решение. Рассмотрим прямоугольники из первого столбца, и для каждого из них рассмотрим соседний по стороне прямоугольник второго столбца. В каждой паре соседних прямоугольников у прямоугольников одинаковые вертикальные стороны, поэтому разность их периметров равна удвоенной разности длин горизонтальных сторон. Но разности горизонтальных сторон во всех парах одинаковы, поэтому все разности периметров должны быть одинаковы.

В нашем случае две разности равны 4, а одна равна -4. Следовательно, либо периметр левого среднего, либо периметр центрального прямоугольника посчитан неверно. Если бы периметр центрального прямоугольника был посчитан неверно, то аналогичная проблема несовпадения разностей наблюдалась бы для второго и третьего столбцов. Однако в них все разности равны, поэтому неверно посчитан периметр левого среднего прямоугольника. Его настоящий периметр равен $12 - 4 = 8$.

Ниже приведён пример длин сторон, при которых эта конфигурация реализуется.

	3	5	4
3	12	16	14
1	8	12	10
2	10	14	12

5.2. Лёша разбил прямоугольник на девять меньших прямоугольников. Внутри каждого из этих прямоугольников Лёша записал число, равное его периметру, как изображено на рисунке.

Известно, что у восьми прямоугольников Лёша посчитал периметры правильно, а у одного прямоугольника — неправильно. Выберите на рисунке прямоугольник, периметр которого посчитан неверно, и найдите, чему на самом деле равен его периметр.

14	24	18
10	20	14
12	18	16

Ответ: нижний средний, настоящий периметр 22.

5.3. Лёша разбил прямоугольник на девять меньших прямоугольников. Внутри каждого из этих прямоугольников Лёша записал число, равное его периметру, как изображено на рисунке.

Известно, что у восьми прямоугольников Лёша посчитал периметры правильно, а у одного прямоугольника — неправильно. Выберите на рисунке прямоугольник, периметр которого посчитан неверно, и найдите, чему на самом деле равен его периметр.

20	26	22
14	20	18
16	22	20

Ответ: правый верхний, настоящий периметр 24.

5.4. Лёша разбил прямоугольник на девять меньших прямоугольников. Внутри каждого из этих прямоугольников Лёша записал число, равное его периметру, как изображено на рисунке.

Известно, что у восьми прямоугольников Лёша посчитал периметры правильно, а у одного прямоугольника — неправильно. Выберите на рисунке прямоугольник, периметр которого посчитан неверно, и найдите, чему на самом деле равен его периметр.

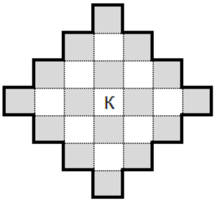
18	12	14
16	18	12
20	14	16

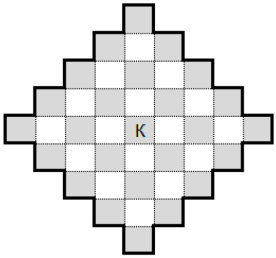
Ответ: средний, настоящий периметр 10.

6.1. Дана клетчатая плоскость, в одной из её клеток сидит 101 кузнечик. Когда раздаётся хлопок, каждый кузнечик мгновенно перепрыгивает в соседнюю по стороне клетку. После того, как Вика хлопнула N раз, все кузнечики оказались в разных клетках. Какое наименьшее значение может принимать N?

Ответ: 10.

Решение. Раскрасим плоскость в шахматную раскраску. Очевидно, что после N хлопков все кузнечики расположены в клетках одного цвета. Также, если какой-то кузнечик отдалился от начальной клетки на a клеток по горизонтали и b клеток по вертикали, то $a + b \leqslant N$. Поэтому после N хлопков кузнечики могут располагаться только в клетках на $N+1$ диагоналях, идущих «слева сверху – вправо вниз», а также только в клетках на $N+1$ диагоналях, идущих «справа сверху – влево вниз». На рисунке серым цветом отмечены достижимые клетки для $N = 3$ и $N = 4$, стартовая клетка отмечена буквой К.





Заметим, что на каждой из $N + 1$ диагоналей «слева сверху – вправо вниз» достижимы $N+1$ клетка. Поэтому всего достижимых клеток $(N+1)^2$. Следовательно, кузнечики смогут оказаться в разных клетках тогда и только тогда, когда выполнено неравенство $(N + 1)^2 \geqslant 101$. Получаем что минимальное N равно 10.

6.2. Дана клетчатая плоскость, в одной из её клеток сидит 95 кузнечиков. Когда раздаётся хлопок, каждый кузнечик мгновенно перепрыгивает в соседнюю по стороне клетку. После того, как Вика хлопнула N раз, все кузнечики оказались в разных клетках. Какое наименьшее значение может принимать N?

Ответ: 9.

6.3. Дана клетчатая плоскость, в одной из её клеток сидит 115 кузнечиков. Когда раздаётся хлопок, каждый кузнечик мгновенно перепрыгивает в соседнюю по стороне клетку. После того, как Вика хлопнула N раз, все кузнечики оказались в разных клетках. Какое наименьшее значение может принимать N?

Ответ: 10.

6.4. Дана клетчатая плоскость, в одной из её клеток сидит 131 кузнечик. Когда раздаётся хлопок, каждый кузнечик мгновенно перепрыгивает в соседнюю по стороне клетку. После того, как Вика хлопнула N раз, все кузнечики оказались в разных клетках. Какое наименьшее значение может принимать N?

Ответ: 11.

7. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску 8×8 две одинаковых ладьи и слона так, чтобы каждая ладья била слона? Ладья бьёт слона, если они стоят в одной строке или одном столбце и между ними нет других фигур.

Ответ: 4032.

Решение. Возможно два случая расстановки фигур.

- Ладьи не стоят в одной вертикали или одной горизонтали. В этом случае количество способов поставить ладьи равно $\frac{64\cdot 49}{2}$, слона можно поставить одним из двух способов. Итого $\frac{64\cdot 49}{2}\cdot 2 = 3136$ способов.
- Ладьи стоят в одной вертикали или одной горизонтали. Пусть ладьи стоят в первой горизонтали. Если между ними ровно k клеток, то поставить слона можно k способами. Поставить ладьи в первую горизонталь так, чтобы между ними было k клеток, можно $7-k$ способами. Поэтому поставить фигуры в первую горизонталь можно

  $$6\cdot 1 + 5\cdot 2 + 4\cdot 3 + 3\cdot 4 + 2\cdot 5 + 1\cdot 6 = 56$$

  способами. Поскольку горизонталь или вертикаль можно выбрать 16 способами, то всего в этом случае будет $56\cdot 16 = 896$ способов.

Суммируя, получаем $3136 + 896 = 4032$ способа.

8.1. На доске выписаны в порядке возрастания все натуральные числа с суммой цифр 100. Какое число написано на 91-м месте?

Ответ: 488 899 999 999.

Решение. Заметим, что в числе не меньше 12 цифр, потому что иначе сумма цифр была бы не больше $9\cdot 11 = 99 < 100$. Будем в порядке возрастания рассматривать возможные первые цифр чисел последовательности.

- Число начинается с цифры 1. Такое число одно — 199 999 999 999.
- Число начинается с цифры 2. Тогда остальные цифры числа — это 8 и десять цифр 9. Существует 11 вариантов для расположении цифры 8 в числе, то есть таких чисел 11.
- Число начинается с цифры 3. Есть два варианта, какими могут быть остальные цифры: 7 и десять цифр 9, две цифры 8 и восемь цифр 9.
  - Если 7 и десять цифр 9, то аналогично получим 11 вариантов.
  - Если две цифры 8 и восемь цифр 9, то посмотрим, как могут располагаться в числе цифры 8. Если они располагаются рядом, то таких вариантов 10. Если они располагаются не рядом, то таких вариантов $C_{10}^2 = 45$. Итого 55 вариантов.
- Число начинается с цифр 46. Такое число одно — 469 999 999 999.
- Число начинается с цифр 47. Тогда остальные цифры числа — это 8 и девять цифр 9. Существует 10 вариантов для расположении цифры 8 в числе, то есть таких чисел 10.
- Число начинается с цифр 487. Такое число одно — 487 999 999 999.

Выше перечислены 90 первых членов последовательности. Следующее число с суммой цифр 100 начинается с цифр 488. Тогда остальные цифры числа — это 8 и восемь цифр 9. Наименьшее такое число равно 488 899 999 999, это и есть ответ.

8.2. На доске выписаны в порядке возрастания все натуральные числа с суммой цифр 100. Какое число написано на 92-м месте?

Ответ: 488 989 999 999.

8.3. На доске выписаны в порядке возрастания все натуральные числа с суммой цифр 100. Какое число написано на 93-м месте?

Ответ: 488 998 999 999.

8.4. На доске выписаны в порядке возрастания все натуральные числа с суммой цифр 100. Какое число написано на 94-м месте?

Ответ: 488 999 899 999.

9.1. В сказочной стране живут 100 гномов, у каждого из них есть свой колпак. Однажды, отправляясь добывать золото, некоторые гномы надели не свои колпаки. Заметив это, они решили исправить ситуацию: несколько раз кто-то из гномов подходил к кому-то из остальных, говорил фразу «У меня чужой колпак» и менялся с ним колпаками. Каждый гном говорит правду тем, на ком надет свой колпак, и обманывает тех, на ком надет чужой колпак. Какое наибольшее количество обменов могло произойти?

Ответ: 98.

Решение. Допустим, гном A говорит гному B фразу «У меня чужой колпак». Если у него в самом деле чужой колпак, то он говорит правду, и значит, на гноме B надет его собственный колпак. После обмена у обоих будут чужие колпаки. Если на A надет его колпак, то он обманывает B, поэтому на B надет чужой колпак. После обмена у обоих будут чужие колпаки.

Следовательно, каждом обмене участвуют гном в чужом колпаке и гном в своём колпаке. После обмена количество гномов в чужих колпаках увеличивается на 1. Если в начале все гномы были в своих колпаках, то ни одного обмена произойти не могло. Нетрудно понять, что невозможен случай, когда один гном был в чужом колпаке, а все остальные — в своих. Таким образом, гномов в своих колпаках было не больше 98, то есть обменов было не больше 98.

Несложно видеть, что если гномов в своих колпаках было 98, то можно организовать обмен так, чтобы в конце все гномы были не в своих колпаках.

9.2. В сказочной стране живут 120 гномов, у каждого из них есть свой колпак. Однажды, отправляясь добывать золото, некоторые гномы надели не свои колпаки. Заметив это, они решили исправить ситуацию: несколько раз кто-то из гномов подходил к кому-то из остальных, говорил фразу «У меня чужой колпак» и менялся с ним колпаками. Каждый гном говорит правду тем, на ком надет свой колпак, и обманывает тех, на ком надет чужой колпак. Какое наибольшее количество обменов могло произойти?

Ответ: 118.

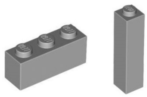
9.3. В сказочной стране живут 140 гномов, у каждого из них есть свой колпак. Однажды, отправляясь добывать золото, некоторые гномы надели не свои колпаки. Заметив это, они решили исправить ситуацию: несколько раз кто-то из гномов подходил к кому-то из остальных, говорил фразу «У меня чужой колпак» и менялся с ним колпаками. Каждый гном говорит правду тем, на ком надет свой колпак, и обманывает тех, на ком надет чужой колпак. Какое наибольшее количество обменов могло произойти?

Ответ: 138.

9.4. В сказочной стране живут 160 гномов, у каждого из них есть свой колпак. Однажды, отправляясь добывать золото, некоторые гномы надели не свои колпаки. Заметив это, они решили исправить ситуацию: несколько раз кто-то из гномов подходил к кому-то из остальных, говорил фразу «У меня чужой колпак» и менялся с ним колпаками. Каждый гном говорит правду тем, на ком надет свой колпак, и обманывает тех, на ком надет чужой колпак. Какое наибольшее количество обменов могло произойти?

Ответ: 158.

10.1. У Игоря есть много деталек LEGO: горизонтальных длины 3 и вертикальных высоты 3 (см. рисунок).



Он сложил из них прямоугольную стену толщиной 1 из 66 строк и 67 столбцов. Оказалось, что в каждом из 67 столбцов ровно n вертикальных деталек. Чему может быть равно n? Укажите все возможные варианты.

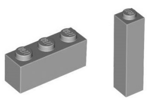
Ответ: 22.

Решение. Будем называть *клетками* кубик размера $1\times1\times1$. Покрасим столбцы в три цвета: белый, синий, красный, белый, синий, красный и т. д. Заметим, что синих и красных столбиков будет поровну, а белых будет на один больше. Таким образом, белых клеток будет на 66 больше, чем клеток других цветов.

Каждая вертикальная деталька содержит клетки одного цвета, а каждая горизонтальная — клетки трёх разных цветов. Следовательно, вертикальных деталек, состоящих из клеток белого цвета, должно быть на 22 больше, чем вертикальных деталек каждого из других цветов.

С другой стороны, в первых 66 столбцах вертикальных деталек каждого цвета $22n$, то есть поровну. Поэтому всего вертикальных деталек белого цвета ровно на n больше, чем вертикальных деталек каждого из других цветов. Следовательно, $n = 22$, то есть все детальки вертикальные.

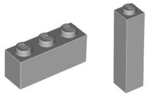
10.2. У Игоря есть много деталек LEGO: горизонтальных длины 3 и вертикальных высоты 3 (см. рисунок).



Он сложил из них прямоугольную стену толщиной 1 из 33 строк и 34 столбцов. Оказалось, что в каждом из 34 столбцов ровно n вертикальных деталек. Чему может быть равно n? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 11.

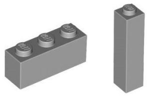
10.3. У Игоря есть много деталек LEGO: горизонтальных длины 3 и вертикальных высоты 3 (см. рисунок).



Он сложил из них прямоугольную стену толщиной 1 из 48 строк и 49 столбцов. Оказалось, что в каждом из 48 столбцов ровно n вертикальных деталек. Чему может быть равно n? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 16.

10.4. У Игоря есть много деталек LEGO: горизонтальных длины 3 и вертикальных высоты 3 (см. рисунок).



Он сложил из них прямоугольную стену толщиной 1 из 72 строк и 73 столбцов. Оказалось, что в каждом из 72 столбцов ровно n вертикальных деталек. Чему может быть равно n? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 24.

11.1. На столе лежат 3 кучки спичек. Известно, что в первой из них спичек столько же, сколько суммарно во второй и третьей.

Каждую минуту Петя делал следующее: докладывал во вторую кучку спичек вдвое больше, чем в первую, а в третью докладывал на одну спичку меньше, чем во вторую (в разное время количество докладываемых спичек могло быть разным).

Спустя 11 минут в каждой кучке стало по 40 спичек. Сколько спичек было изначально в первой кучке?

Ответ: 23.

Решение. Пусть изначально во второй кучке было x спичек, в третьей y спичек, тогда в первой было $x + y$ спичек. Пусть в течение следующих 11 минут в первую кучку доложили a спичек. Тогда во вторую доложили вдвое больше, то есть $2a$ спичек. В течение каждой из 11 минут в третью кучку докладывали на 1 спичку меньше, чем во вторую, поэтому в третью кучку за 11 минут доложили $2a - 11$ спичек.

По условию $x + y + a = y + 2a = y + 2a - 11 = 40$. Из первого равенства следует, что $y = a$. Тогда из третьего равенства получаем $3a - 11 = 40$, откуда $a = 17$. Теперь из первого равенства получаем $x + y = 40 - a = 40 - 17 = 23$ — количество спичек в первой кучке изначально.

11.2. На столе лежат 3 кучки спичек. Известно, что в первой из них спичек на 1 меньше, чем суммарно во второй и третьей.

Каждую минуту Петя делал следующее: докладывал во вторую кучку спичек вдвое больше, чем в первую, а в третью докладывал на одну спичку меньше, чем во вторую (в разное время количество докладываемых спичек могло быть разным).

Спустя 7 минут в каждой кучке стало по 60 спичек. Сколько спичек было изначально в первой кучке?

Ответ: 38.

11.3. На столе лежат 3 кучки спичек. Известно, что в первой из них спичек на 1 больше, чем суммарно во второй и третьей.

Каждую минуту Петя делал следующее: докладывал во вторую кучку спичек вдвое больше, чем в первую, а в третью докладывал на одну спичку больше, чем во вторую (в разное время количество докладываемых спичек могло быть разным).

Спустя 13 минут в каждой кучке стало по 96 спичек. Сколько спичек было изначально в первой кучке?

Ответ: 68.

11.4. На столе лежат 3 кучки спичек. Известно, что в первой из них спичек на 2 больше, чем суммарно во второй и третьей.

Каждую минуту Петя делал следующее: докладывал во вторую кучку спичек вдвое больше, чем в первую, а в третью докладывал на одну спичку больше, чем во вторую (в разное время количество докладываемых спичек могло быть разным).

Спустя 11 минут в каждой кучке стало по 72 спичек. Сколько спичек было изначально в первой кучке?

Ответ: 51.

12. Различные натуральные числа x и y меньше 100, а их последние цифры совпадают. Известно, что неполное частное от деления x на 9 равно остатку от деления y на 9, а неполное частное от деления y на 9 равно остатку от деления x на 9. Чему может быть равна сумма $x + y$? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 50, 70, 90, 110.

Решение. Пусть $x = 9a + b$, где b — остаток от деления x на 9, то есть $b < 9$. Тогда по условию $y = 9b + a$. Поскольку $x + y = 10(a + b)$, то $x + y$ делится на 10.

Так как последние цифры у x и y совпадают, то $x - y$ делится на 10. С другой стороны, $x - y = 8(a - b)$, поэтому $x - y$ делится на 8. Следовательно, $x - y$ делится на НОК$(8, 10) = 40$. Без ограничения общности будем считать, что $x > y$. Тогда из делимости $x - y$ на 40 получаем неравенство $x > 40$.

Поскольку $x + y$ и $x - y$ делятся на 10, то и их сумма делится на 10, то есть $2x$ делится на 10. Поэтому x делится на 5.

Так как a и b не больше 8, то $x = 9a + b \leqslant 9 \cdot 8 + 8 = 80$.

Итого x может быть равно 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80. Поскольку $x - y$ делится на 40, то y в этом случае будут соответственно равно 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40. Перебрав эти варианты, поймём, что подходят только $x = 45, 55, 65, 75$. Сумма $x + y$ в этих случаях будет соответственно равна 50, 70, 90, 110.