

Очная олимпиада 1

1. Даны различные вещественные числа a_1, a_2, \dots, a_{100} . Докажите, что в наборе

$$\left\{ a_1, \frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}, \dots, \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{100}}{100} \right\}$$

каждое число встречается не более 50 раз.

2. Колбасу длиной 21 см разрезали на 21 кусок. Толщина любых двух кусков различается не более, чем в 3 раза. При каком наименьшем k обязательно найдутся два куска, толщина которых отличается не более, чем на k ?
3. Высоты AA_1, BB_1, CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Пусть M — середина стороны BC , N — середина B_1C_1 . Докажите, что описанная окружность треугольника MHN касается прямой AA_1 .
4. Поверхность куба $11 \times 11 \times 11$ разбита на клетки 1×1 . Муравей бегает по диагоналям клеток, нигде не поворачивая назад. Он не может бывать внутри одной клетки более одного раза, но может несколько раз проходить одну вершину. Может ли он посетить центры 720 клеток?