Стереометрический разнобой

1. Одним из сечений прямоугольного параллелепипеда является правильный шестиугольник. Докажите, что этот параллелепипед — куб.

2. В тетраэдре $ABCD$ из вершины A опустили перпендикуляры AB', AC', AD' на плоскости, делящие двугранные углы при ребрах CD, DB, BC пополам. Докажите, что плоскости BCD и $B'C'D'$ параллельны.

3. Длина ребра правильного тетраэдра равна $\mathbf{a}$. Докажите, что периметр $\mathbf{P}$ треугольника, получающегося в сечении этого тетраэдра, проходящего через одну из его вершин, удовлетворяет неравенству $\mathbf{P} > \mathbf{2a}$.

4. Есть полусферическая ваза, закрытая плоской крышкой. В вазе лежат четыре одинаковых апельсина, касаясь вазы, и грейпфрут, касающийся всех четырёх апельсинов. Верно ли, что все четыре точки касания грейпфрута с апельсинами обязательно лежат в одной плоскости? (Все фрукты являются шарами.)

5. В правильной четырёхугольной усеченной пирамиде середина N ребра B_1C_1 верхней грани $A_1B_1C_1D_1$ соединена с серединой M ребра AB нижней грани $ABCD$. Прямые B_1C_1 и AB не лежат в одной плоскости. Докажите, что проекции ребер B_1C_1 и AB на прямую MN равны между собой.

6. Каждая боковая грань пирамиды является прямоугольным треугольником, в котором прямой угол примыкает к основанию пирамиды. В пирамиде проведена высота. Может ли она лежать внутри пирамиды?

7. Докажите, что можно на каждом ребре произвольного тетраэдра записать по неотрицательному числу так, чтобы сумма чисел на сторонах каждой грани численно равнялась её площади.

8. Треугольная пирамида $ABCD$ вписана в сферу с центром O. Для каждой вершины соединим прямой точку пересечения медиан противоположной грани с точкой, симметричной этой вершине относительно точки O. Докажите, что эти прямые пересекаются в одной точке F, причем отрезок, соединяющий F с серединой ребра AB, перпендикулярен ребру CD.

9. Плоскость α пересекает рёбра AB, BC, CD и DA треугольной пирамиды $ABCD$ в точках K, L, M и N соответственно. Оказалось, что двугранные углы $\angle(KLA, KLM)$, $\angle(LMB, LMN)$, $\angle(MNC, MNK)$ и $\angle(NKD, NKL)$ равны. Докажите, что проекции вершин A, B, C и D на плоскость α лежат на одной окружности.