

Стереометрический разнобой

1. В тетраэдре провели четыре отрезка, соединяющие вершины с центрами вписанных окружностей противоположных граней. Докажите, что если два таких отрезка пересекаются, то два других тоже.
2. Высота четырёхугольной пирамиды $SABCD$ проходит через точку пересечения диагоналей её основания $ABCD$. Из вершин основания опущены перпендикуляры AA_1 , BB_1 , CC_1 , DD_1 на прямые SC , SD , SA и SB соответственно. Оказалось, что точки S , A_1 , B_1 , C_1 , D_1 различны и лежат на одной сфере. Докажите, что прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 , DD_1 проходят через одну точку.
3. Окружность с центром I , вписанная в грань ABC треугольной пирамиды $SABC$, касается отрезков AB , BC , CA в точках D , E , F соответственно. На отрезках SA , SB , SC отмечены соответственно точки A' , B' , C' так, что $AA' = AD$, $BB' = BE$, $CC' = CF$; S' — точка на описанной сфере пирамиды, диаметрально противоположная точке S . Известно, что SI является высотой пирамиды. Докажите, что точка S' равноудалена от точек A' , B' , C' .
4. Сфера ω проходит через вершину S неправильной пирамиды $SABC$ и пересекает рёбра SA , SB и SC вторично в точках A_1 , B_1 и C_1 соответственно. Окружность пересечения сферы ω с описанной сферой Ω пирамиды $SABC$ лежит в плоскости, параллельной плоскости (ABC) . Точки A_2 , B_2 и C_2 симметричны точкам A_1 , B_1 и C_1 относительно середин рёбер SA , SB и SC соответственно. Докажите, что точки A , B , C , A_2 , B_2 и C_2 лежат на одной сфере.
5. На боковых рёбрах SA , SB и SC правильной треугольной пирамиды $SABC$ взяты соответственно точки A_1 , B_1 и C_1 так, что плоскости $A_1B_1C_1$ и ABC параллельны. Пусть O — центр сферы, проходящей через точки S , A , B и C_1 . Докажите, что прямая SO перпендикулярна плоскости $A_1B_1C_1$.
6. В пространстве даны прямая l и точка A , не лежащая на ней. XY — общий перпендикуляр к прямой l и произвольной прямой AU (X лежит на l). Найдите ГМТ Y по всем возможным прямым, проходящим через A .
7. Доказать, что всякая плоскость, проходящая через середины двух противоположных рёбер тетраэдра, делит его объём пополам.
8. Дана пирамида $SABCD$, в основании которой лежит выпуклый четырёхугольник $ABCD$. В пирамиду вписана сфера, касающаяся грани $ABCD$ в точке P . Докажите, что $\angle APB + \angle CPD = 180^\circ$.