

Многочлены и не только

1. На координатной плоскости нарисованы четыре графика функций вида $y = x^2 + ax + b$. Известно, что есть ровно четыре точки пересечения, причём в каждой пересекаются ровно два графика. Докажите, что сумма наибольшей и наименьшей из абсцисс точек пересечения равна сумме двух других абсцисс.
2. Пусть a, b, c, d, e и f — некоторые числа, причем $ace \neq 0$. Известно, что значения выражений $|ax + b| + |cx + d|$ и $|ex + f|$ равны при всех значениях x . Докажите, что $ad = bc$.
3. Функция $f(x)$, заданная на всей числовой оси, при всех действительных x и y удовлетворяет условию

$$f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)f\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Верно ли, что функция $f(x)$ обязательно чётная?

4. Учитель написал на доске квадратное уравнение $x^2 + 10x + 20 = 0$, после чего каждый из учеников по очереди увеличивал или уменьшал на единицу либо коэффициент при x , либо слагаемое без x . В результате на доске оказалось написано уравнение $x^2 + 20x + 10 = 0$. Верно ли, что в некоторых моменты на доске было написано уравнение с целыми корнями?
5. Шесть членов команды на Международную математическую олимпиаду отбираются из 13 кандидатов. На отборочной олимпиаде кандидаты набрали a_1, a_2, \dots, a_{13} баллов ($a_i \neq a_j$ при $i \neq j$). Руководитель команды заранее выбрал 6 кандидатов и теперь хочет, чтобы в команду попали именно они. С этой целью он подбирает многочлен $P(x)$ и вычисляет творческий потенциал каждого кандидата по формуле $c_i = P(a_i)$. При каком минимальном n он заведомо сможет подобрать такой многочлен $P(x)$ степени не выше n , что творческий потенциал любого из его шести кандидатов окажется строго больше, чем у каждого из семи оставшихся?
6. Бесконечная последовательность ненулевых чисел a_1, a_2, a_3, \dots такова, что при всех натуральных $n \geq 2023$ число a_{n+1} является наименьшим корнем многочлена

$$P_n(x) = x^{2n} + a_1 x^{2n-2} + a_2 x^{2n-4} + \dots + a_n.$$

Докажите, что существует такое N , что последовательность $a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \dots$ строго убывает.