Потоки на графах

Определение. Транспортной сетью называется ориентированный граф $G = (V, E)$, в котором каждое ребро (u, v) имеет свою *пропускную способность* $c(u, v) \geqslant 0$. Так же в графе выделяются две вершины: *источник (исток)* s и *сток* t такие, что любая другая вершина лежит на пути из s в t.

Определение. Потоком на транспортной сети называется функция $f : V \times V \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая следующему набору свойств для любых вершин u, v:

- **Ограничение пропускной способности.** Поток по ребру не может превысить пропускную способность, то есть $f(u, v) \leqslant c(u, v)$.
- **Антисимметричность.** Поток в разные стороны противоположен по направлению. То есть $f(u, v) = -f(v, u)$.
- **Сохранение потока.** Сколько в вершину втекает, столько же и вытекает, кроме стока и истока. То есть $\sum\limits_{w \in V} f(u, w) = 0 \quad \forall u \notin \{s, t\}$.

Определение. Число $|f| = \sum\limits_{v \in V \setminus s} f(s, v)$ называется *величиной потока*.

Определение. (s, t)-*разрезом* (или иногда просто *разрезом*) будем называть разделение всех вершин транспортной сети на два множества S и T такое, что $s \in S$ $t \notin S$ $T = V \setminus S$.

Определение. *Величиной потока* и *пропускной способностью* данного разреза в транспортной сети будем называть суммы $f(S, T) = \sum\limits_{u \in S, v \in T} f(u, v)$ и $c(S, T) = \sum\limits_{u \in S, v \in T} c(u, v)$ соответственно.

Теорема Форда-Фалкерсона. Величина максимального потока равна пропускной способности минимального разреза.

Определение. Для зануд: *максимальным* потоком называется потом максимальной величины, а *минимальным* разрезом называется называется разрез с минимальной пропускной способностью.

1. **(а)** Величина потока не превосходит величины потока через любой разрез.
(б) Величина потока через любой разрез одинакова.
(в) Величина максимального потока не превосходит пропускной способности минимального разреза.
(г) Докажите, что если максимальный поток существует, то верна т. ФФ.
(д) Докажите, что максимальный поток существует, если пропускные способности всех рёбер целочисленные. Или рациональные.
(е) Докажите, что максимальный поток существует.
(ж) Докажите, что если пропускные способности рёбер целочисленные, то и максимальный поток можно выбрать целочисленным (то есть, чтобы поток по любому ребру был целым числом).

2. **(а)** (*Рёберная теорема Менгера*) Если в графе для каких вершин A и B при удалении любых n рёбер можно найти путь из A в B по оставшимся рёбрам, то между этими вершинами можно найти не менее $n + 1$ пути, попарно не пересекающимся по рёбрам.
(б) Сформулируйте и докажите вершинную теорему Менгера.

3. **(а)** Докажите лему Холла через потоки на графах.
(б) Докажите лемму Холла для арабских стран через потоки на графах, не сводя её к обычной лемме Холла.
(в) Докажите, что если в двудольном графе степень любой вершины не превосходит k, то его рёбра можно правильным образом покрасить в k цветов.

4. Докажите через потоки на графах теорему Кёнгиа. То есть, что в двудольном графе величина наибольшего паросочетания равна величине наименьшего вершинного покрытия.

5. Не читайте эту задачу, если не решили первую. Так интересней. Приведём алгоритм Форда-Фалкерсона для поиска максимального потока через транспортную сеть.

1. Ищем в остаточной сети произвольный путь от истока к стоку.
2. Пускаем по этому пути потом, равный минимальной пропускной способности на этом пути.
3. Вычитаем из пропускных способностей всех рёбер этого пути величину потока, а к обратным рёбрам прибавляем.
4. Повторяем много раз.

(а) Приведите пример транспортной сети, в которой этот алгоритм никогда не остановится. **(б)** Приведите пример транспортной сети, в которой этот алгоритм даже не будет сходиться к максимальному потоку. **(в)** Докажите, что если алого ритм ФФ будет искать путь в остаточной сети сортируя рёбра из вершины в порядке возрастания номеров целевых вершин, то алгоритм всегда завершится.

6. *Каноническим* разрезом для функции потока f называется множество вершин, достижимых из s по ненасыщенным рёбрам. Покажите, что любой максимальный поток для одной сети даёт один и тот же канонический разрез.