Классическая ТЧ

1. Найдите все функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такие, что

$$f(n) + nf(m) \vdots n + f(m)$$

для всех $n, m \in \mathbb{N}$.

2. Натуральные числа a, b, c удовлетворяют условию $a^2 + b^2 + c^2 = 1 + 2abc$. Докажите, что хотя бы одно из чисел $\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}, \frac{c+1}{2}$ является точным квадратом.

3. Последовательность x_n определена рекурсивно: $x_1 = a$ при некотором натуральном a, а также $x_{n+1} = 2^{x_n} + 1$. Пусть $y_n = 2x_n - 1$. Какое максимальное количество подряд идущих простых чисел может быть в последовательности y_n?

4. Докажите, что число $5^n - 1$ не делится на $2^n + 1$ ни при каком натуральном n.

5. Дано нечётное простое число p. Целые числа $a_1, \ldots, a_p$ таковы, что сумма $a_1^i + a_2^i + \ldots + a_p^i$ кратна p при каждом $i = 1, 2, \ldots, s$. При каком наименьшем s из этого следует, что числа $a_1, \ldots, a_p$ дают либо одинаковые, либо попарно различные остатки при делении на p?

6. Найдите все натуральные $n > 1$ такие, что для любого простого $p < n$ выполнено сравнение $p^n \equiv (p-1)^n + 1 \pmod{n^2}$.

7. Числа $a_1, a_2, \ldots a_p$ и $b_1, b_2, \ldots, b_p$ таковы, что среди чисел вида $a_i + b_j$ каждый остаток по модулю p встречается ровно p раз (разумеется p — простое число). Докажите, что либо в наборе a_i, либо в наборе b_i встречаются всевозможные остатки по модулю p.