Тренировочная олимпиада, решения.

1. Существуют ли четыре различных приведённых квадратных трёхчлена такие, что сумма любых двух из них имеет ровно один корень?

Решение 1. Пусть существуют такие трёхчлены $f_i(x) = x^2 + a_i x + b_i, i = 1, 2, 3, 4$. Тогда дискрминант суммы любых двух равен нулю, то есть $(a_i + a_j)^2 - 8(b_i + b_j) = 0$. В таком случае

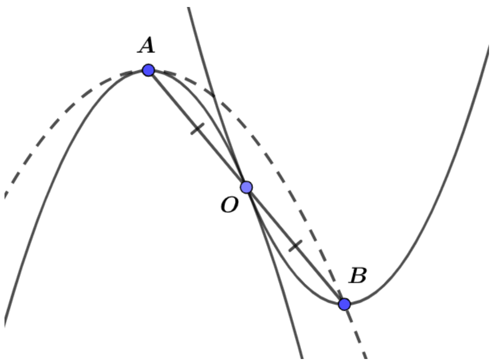
$$0 = (a_1+a_2)^2-8(b_1+b_2)-((a_1+a_3)^2-8(b_1+b_3)) = (a_2-a_3)(2a_1+a_2+a_3)-8(b_2-b_3).$$

Аналогично получаем, что $(a_2 - a_3)(2a_4 + a_2 + a_3) - 8(b_2 - b_3) = 0$, то есть

$$0 = (a_2 - a_3)(2a_1 + a_2 + a_3) - (a_2 - a_3)(2a_4 + a_2 + a_3) = 2(a_2 - a_3)(a_1 - a_4).$$

Тогда у каких-то двух трёхчленов совпадают коэффициенты при x, не умоляя общности $a_2 = a_3$. Но так как тогда $(a_1 + a_2)^2 = (a_1 + a_3)^2$, то $8(b_1 + b_2) = 8(b_1 + b_3)$, то есть $b_2 = b_3$, то есть $f_2(x) = f_3(x)$, противоречие.

Решение 2. Пусть такие $f_i(x)$ существуют. Тогда раз $f_i(x) + f_j(x) = 0$ имеет ровно один корень, то парабола $f_i(x)$ касается параболы $-f_j(x)$. Докажем, что существует ровно одна парабола (приведённая), которая касается $-f_1(x)$ и $-f_2(x)$, из этого будет следовать, что $f_3(x) = f_4(x)$. Если две равны параболы касаются в точке O, то они переходят при центральной симметрии относительно этой точки в друг друга. Следовательно, вершины этих парабол A и B симметричны относительно точки O. В таком случае точка B лежит на параболе, полученной гомотетией из параболы $-f_1(x)$ в точке A с коэффициентом 2. Также она лежит на аналогичной параболе для $-f_2(x)$. Эти две параболы имеют одинаковый старший коэффициент, а значит пересекаются только в одной точке. Значит вершина приведённой параболы, касающихся $-f_1(x)$ и $-f_2(x)$ задаётся однозначно, то есть их одновременно может касаться только одна приведённая парабола.



2. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n, обладающих следующим свойством: сумма всех делителей числа n больше $2n$, причём число $2n$ нельзя представить в виде суммы нескольких делителей n.

Решение: Докажем, что числа вида $70p$, где $p > 144$ — простое, нам подходят. Действительно, сумма его делителей равна $(p+1)(7+1)(5+1)(2+1) = 144p + 144$, что больше чем $2 \cdot 70p$. Пусть теперь мы смогли представить $140p$ как сумму некоторых его делителей. Так как $140p$ делится на p, то сумма делителей, не кратных p, должна делится на p, но она не больше чем 144, что меньше p, то есть таких делителей (не кратных p) нет. Тогда все используемые делители кратны p и равенство можно сократить на p. Мы получим, что 140 можно представить как сумму делителей числа 70. Но сумма делителей 70 равна 144, и нельзя выкинуть несколько делителей, дающих в сумме 4, противоречие.

Как можно было додуматься до решения: Главная мысль состоит в том, что если у вас есть число n, которое подходит под условие, то число вида np, где p — простое, большее суммы всех делителей n, подходит (доказательство проводится точно также, как и для случая $n = 70$ в решении). В таком случае для решения задачи достаточно найти одно подходящее n. Упростить себе нахождение такого n можно было, например, поняв, что какие-то серии чисел точно не подходят (например вида p^n, pq, $6k$ и так далее), тогда круг поиска среди первых чисел заметно сократится.

3. Пусть $X_1, \dots, X_{100}$ — различные непустые подмножества конечного множества S. Оказалось, что для любого $i \in \{1, \dots, 99\}$ множества X_i и X_{i+1} не пересекаются, а их объединение не совпадает с множеством S. Какое наименьшее количество элементов может содержать S?

Ответ: 8.

Оценка. Ясно, что в S должно быть хотя бы сто различных подмножеств, и так как $2^6 < 100$, то осталось только показать, что в S не может быть 7 элементов. Пусть такое может быть...

Путь 1. Разобьём все множества на пары соседних. Рассмотрим пару X_i и X_{i+1}. Так как они не пересекаются и в объедении не дают все множество, то $|X_i| + |X_{i+1}| \leqslant 6$. Следовательно $\Sigma|X_i| \leqslant 50 \cdot 6 = 300$. Но с другой стороны сумма всех мощностей это минимум $C_7^1 \cdot 1 + C_7^2 \cdot 2 + C_7^3 \cdot 3 + C_7^4 \cdot 4 + (100 - C_7^1 + C_7^2 + C_7^3 + C_7^4) \cdot 5 = 304$, противоречие.

Путь 2. Заметим, что справа от множества, которое содержит $\geqslant 4$ элемента, может стоять только множество, которое содержит $\leqslant 2$ элемента (либо вообще ничего не стоять). Тогда таких множеств не больше чем $C_7^1 + C_7^2 + 1$. Тогда всего множеств не больше чем $2C_7^1 + 2C_7^2 + C_7^3 + 1 = 92 < 100$, противоречие.

Пример. Покажем, что если для множества из m элемента можно выбрать такую цепочку длинны n, то для множества из $m+1$ элемента можно выбрать цепочку длинны $2n-1$. Пусть для m-элементного множества есть цепочка $X_1, X_2, \dots, X_n$. Обозначим $X'_i = X_i \cup \{m+1\}$. Тогда для $m+1$-элементного множества подойдёт цепочка $\dots, X_{n-3}, X'_{n-2}, X_{n-1}, X_n, X'_{n-1}, X_{n-2}, X'_{n-3}, \dots$. Действительно, все множества в этой цепочке различны, в объединении не дают всё (так как X_i и X_{i+1} не дают всё множество из m элементов) и не пересекаются (так как X_i и X_{i+1} не пересекаются, а по элементу $m+1$ множества тоже очевидно не пересекаются).

Приведём пример цепочки длинны 8 для 4-элементного множества:

$$\{1\}, \{2,3\}, \{4\}, \{1,3\}, \{2\}, \{1,4\}, \{3\}, \{2,4\}.$$

Тогда по утверждению выше для 8-элементного множества найдётся цепочка длинны $2(2(2(2 \cdot 8 - 1) - 1) - 1) - 1 = 113 > 100$.

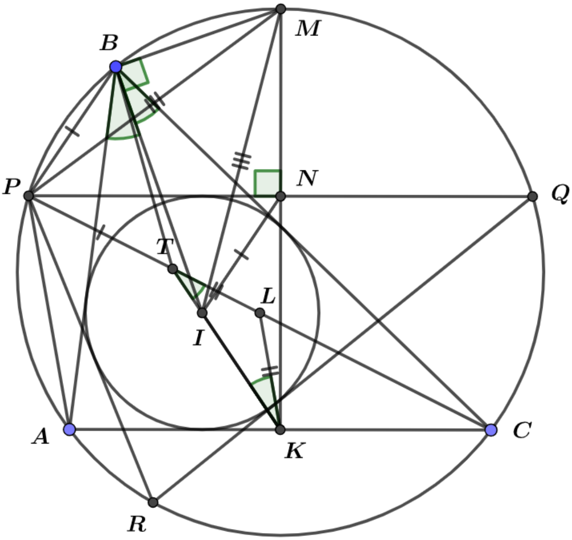
4. Треугольник ABC, в котором $AB < BC$, вписан в окружность ω и описан около окружности γ с центром I. Прямая l, параллельная AC, касается окружности γ и пересекает дуги BAC и BCA в точках P и Q соответственно. Известно, что $PQ = 2BI$. Докажите, что $AP + 2PB = CP$.

Решение 1: Пусть M, N, K, L — середины дуги PBQ, отрезков PQ, AC и PC соответственно. По теореме Понселе мы знаем, что касательные к окружности ω из точек P, Q пересекаются в некоторой точке R, лежащей на Ω. Тогда по лемме о трезубце получаем, что $MP = MI$. Также из условия мы знаем, что $BI = PN$, и легко видеть, что углы MBI и MNP равны по $90°$. Тогда получаем, что треугольники PMN и IMB равны. В частности это означает, что $PBNI$ является равнобокой трапецией.

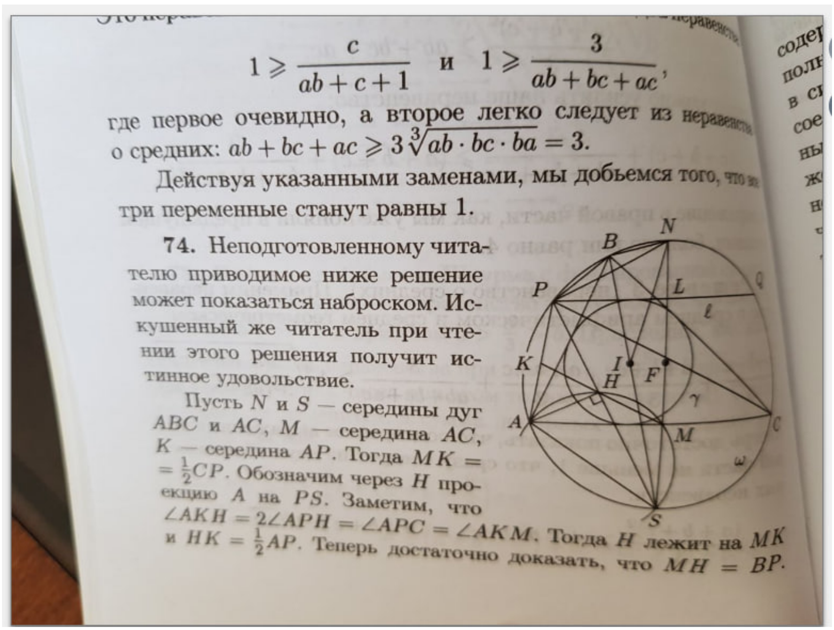
Так как LK — средняя линия в треугольнике PAC, мы знаем, что $2KL = AP$, а также мы знаем, что $2PL = PC$, так что для доказательства тождества $AP + 2BP = PC$ нам надо доказать, что $KL + BP = PL$. Продлим KI до пересечения с PC в точке T. Докажем, что $LT = LK$ и $PT = PB$, это докажет нужное нам равенство.

Обозначим дугу PB за 2φ. Тогда $\angle LKC = \angle PAC = \varphi + \alpha$. Угол $\angle IKA = \angle INP = \angle PBI = \gamma - \varphi + \frac{\beta}{2}$. Значит угол $\angle IKL = 180° - \angle LKC - \angle IKA = \frac{\beta}{2}$. Угол $\angle KLC = \angle APC = \beta$. Тогда по внешнему углу $\angle KTL = \frac{\beta}{2}$, значит $TL = LK$.

Теперь рассмотрим четырёхугольник $ITBC$. $\angle ITC = \angle IBC = \frac{\beta}{2}$. Значит он вписанный. Значит угол $\angle BTC = \angle BIC = 90° + \frac{\alpha}{2}$, то есть угол $BTP = 90° - \frac{\alpha}{2}$. А угол $\angle BPC = \angle BAC = \alpha$, следовательно по сумме углов треугольника PBT он тоже равнобедренный и $PT = PB$, что и требовалось.



Решение 2:



$$1 \geqslant \frac{c}{ab+c+1} \quad \text{и} \quad 1 \geqslant \frac{3}{ab+bc+ac},$$

где первое очевидно, а второе легко следует из неравенства о средних: $ab+bc+ac \geqslant 3\sqrt[3]{ab\cdot bc\cdot ba} = 3$.

Действуя указанными заменами, мы добьемся того, что все три переменные станут равны 1.

74. Неподготовленному читателю приводимое ниже решение может показаться наброском. Искушенный же читатель при чтении этого решения получит истинное удовольствие.

Пусть N и S — середины дуг ABC и AC, M — середина AC, K — середина AP. Тогда $MK = \frac{1}{2}CP$. Обозначим через H проекцию A на PS. Заметим, что $\angle AKH = 2\angle APH = \angle APC = \angle AKM$. Тогда H лежит на MK и $HK = \frac{1}{2}AP$. Теперь достаточно доказать, что $MH = BP$.

Пусть L — середина PQ, а F — середина ML. Тогда $IF \perp NS$ и, следовательно,

$$IN^2 - IS^2 = FN^2 - FS^2 = NL \cdot NS - SM \cdot SN.$$

По свойству прямоугольного треугольника $PL^2 = NL \cdot NS$, $AM^2 = NM \cdot MS$, и тогда

$$IN^2 = NL \cdot NS - SM \cdot SN + IS^2 = NP^2 - AS^2 + IS^2 = NP^2$$

(в последнем равенстве мы ненавязчиво воспользовались леммой Мансиона). Тогда треугольники NLP и NBI равны по катету и гипотенузе. Поэтому треугольники PBN и SIN подобны по двум углам. Значит,

$$\frac{PB}{PN} = \frac{SI}{SN} = \frac{AS}{SN} = \frac{MH}{\sin \angle HSM \cdot SN} = \frac{MH}{PN}.$$

Следовательно, $PB = MH$, чтд.