

Комбинаторный разнбой

1. Среди пяти внешне одинаковых монет 3 настоящие и две фальшивые, одинаковые по весу, но неизвестно, тяжелее или легче настоящих. Как за наименьшее число взвешиваний найти хотя бы одну настоящую монету?
2. В Пиквикском клубе состоялось 100 джентльменов. Мистер Пиквик подсчитал, сколько друзей имеет каждый из оставшихся 99 джентльменов среди этих 99 и записал полученные 99 чисел на карточку в некотором порядке. Аналогичные карточки составили и остальные джентльмены. Все 100 карточек сохранились в архиве до наших дней. Докажите, что можно составить сто первую карточку, на которой написано 100 чисел — количества друзей у каждого из джентльменов.
3. На прямой дано 50 отрезков. Докажите, что либо некоторые восемь отрезков имеют общую точку, либо найдутся восемь отрезков, никакие два из которых не имеют общей точки.
4. Дан граф с n вершинами без рёбер. Двое по очереди проводят не проведённое ранее ребро. Проигрывает тот, после чьего хода появится нечётный цикл. Кто выигрывает при правильной игре?
5. Два сумасшедших геометра по очереди отмечают точки на плоскости, причём после каждого хода любые три отмеченные точки должны образовывать треугольник площадью не меньше 1 и не больше 1000. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из геометров имеет выигрышную стратегию (и имеет ли её хоть кто-то из них)?
6. В каждой клетке квадратной таблицы $m \times m$ клеток стоит целое неотрицательное число. При этом, если на пересечении строки и столбца стоит ноль, то сумма чисел в «кресте», состоящем из этой строки и этого столбца, не меньше m . Докажите, что сумма всех чисел в таблице не меньше, чем $m^2/2$.
7. В N -элементном множестве выделены 100 подмножеств. Все они чётны (т. е. состоят из чётного числа элементов), их всевозможные пересечения — по 2, по 3, ..., по 99 — тоже чётны, а пересечение всех 100 подмножеств нечётно. При каком наименьшем N такое возможно?
8. Квадрат разрезан на красные и синие прямоугольники. Сумма площадей красных прямоугольников равна сумме площадей синих. Для каждого синего прямоугольника запишем отношение длины его вертикальной стороны к длине горизонтальной, а для каждого красного прямоугольника — отношение длины его горизонтальной стороны к длине вертикальной. Найдите наименьшее возможное значение суммы всех записанных чисел.