Целочисленная решётка

1. Дан треугольник с вершинами в узлах целочисленной решётки. Пару целых точек внутри данного треугольника будем называть чёткой, если прямая, проходящая через эти две точки, либо проходит через одну из вершин треугольника, либо параллельна одной из его сторон.
(а) Докажите, что если внутри треугольника ровно две целые точки, то они образуют чёткую пару.
(б) Докажите, что если внутри треугольника более двух целых точек, то среди них можно найти чёткую пару.

2. Узлы целочисленной решётки покрашены в 4 цвета так, что вершины любого квадрата 1×1 покрашены в разные цвета. Докажите, что найдётся прямая, принадлежащая сетке, такая, что узлы, лежащие на ней, покрашены в два цвета.

3. На координатной плоскости расположены четыре фишки, центры которых имеют целочисленные координаты. Разрешается сдвинуть любую фишку на вектор, соединяющий центры любых двух из остальных фишек. Докажите, что несколькими такими перемещениями можно совместить любые две наперёд заданные фишки.

4. Множество целых точек плоскости раскрашено в n цветов.
(а) Докажите, что при $n = 2$ найдутся три одноцветные точки являющиеся вершинами прямоугольного равнобедренного треугольника (с катетами параллельными осям).
(б) Докажите, что для любого k существуют два одинаково раскрашенных квадрата $k \times k$ таких, что один получается из другого горизонтальным параллельным переносом. Более того, при достаточно больших k, внутри этих квадратов можно найти квадраты $l \times l$ с тем же свойством (l зависит от k).
(в) Докажите, что найдутся три одноцветные точки, являющиеся вершинами прямоугольного равнобедренного треугольника (с катетами, параллельными осям). *(Докажите для $n = 3$, а дальше поймите, как улучшить алгоритм до любого n.)*
(г) Докажите, что найдутся четыре одноцветные точки, являющиеся вершинами квадрата (со сторонами, параллельными осям).

5. На координатной плоскости отмечены некоторые целые точки. Известно, что внутри любого круга радиуса 2020 хотя бы одна точка отмечена. Докажите, что существует окружность, проходящая хотя бы через четыре отмеченные точки.

6. Рассмотрим на плоскости множество точек с вещественными координатами (x, y) таких, что неравенство $mx + ny \geqslant \frac{1}{2}(m^2 + n^2)$ имеет ровно 2020 целочисленных решений (m, n). Найдите площадь этого множества