Квадратный трёхчлен

1. На декартовой плоскости выбраны 4 точки A_1, A_2, A_3 и A_4 на параболе $y = x^2$ и 4 точки B_1, B_2, B_3 и B_4 на параболе $y = 2009x^2$. Абсциссы точек A_i и B_i совпадают. Докажите, что если точки A_1, A_2, A_3, A_4 лежат на одной окружности, то и точки B_1, B_2, B_3, B_4 тоже.

2. Существует ли квадратный трехчлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что для любого натурального числа n, в десятичной записи которого участвуют одни единицы, число $P(n)$ также записывается одними единицами?

3. На доске пишут n квадратных трёхчленов вида $*x^2 + *x + *$.Можно ли при каком-либо $n > 100$ поставить вместо $3n$ звёздочек некоторые $3n$ последовательных натуральных чисел (в каком-то порядке) так, чтобы каждый из n данных трёхчленов имел два различных целых корня?

4. $P_1 = ax^2 - bx - c, P_2 = bx^2 - cx - a, P_3 = cx^2 - ax - b$. Докажите, что если существует такое действительное α, что $P_1(\alpha) = P_2(\alpha) = P_3(\alpha)$, то $a = b = c$.

5. Две параболы $y = -x^2 + b_1x + c_1$ и $y = -x^2 + b_2x + c_2$ касаются параболы $ax^2 + bx + c$ (где $a > 0$) в точках A и B. Докажите, что прямая AB параллельна общей касательной к первым двум параболам.

6. Даны приведённые квадратные трёхчлены $f(x)$ и $h(x)$, графики которых имеют общую точку, а $g(x)$ — многочлен, отличный от константы. Оказалось, что $f\Big(g\big(h(x)\big)\Big) = h\Big(g\big(f(x)\big)\Big)$ для всех вещественных x. Докажите, что $f(x) = h(x)$.

7. Целые числа a, b, c таковы, что при всех целых x число ax^2+bx+c — точный квадрат. Докажите, что существуют такие целые числа d и e, что $ax^2 + bx + c = (dx + e)^2$.

8. Дан квадратный трёхчлен $f(x) = x^2 + ax + b$. Уравнение $f\left(f(x)\right) = 0$ имеет 4 различных действительных корня, сумма двух из которых равна -1. Докажите, что $b \leqslant -\frac{1}{4}$.

9. Есть 14 приведённых квадратных трёхчленов с одинаковыми дискриминантами. Оказалось, что сумма всех трёхчленов не имеет корней. Какое наибольшее количество попарных сумм этих трёхчленов могут иметь корни?

10. Петя задумал два многочлена $f(x)$ и $g(x)$, каждый вида $ax^2 + bx + c$ (т. е. степень каждого многочлена не превышает 2). За ход Вася называет Пете число t, а Петя сообщает ему (по своему усмотрению) одно из значений $f(t)$ или $g(t)$ (не уточняя, какое именно он сообщил). После n ходов Вася должен определить один из петиных многочленов. При каком наименьшем n у Васи есть стратегия, позволяющая гарантированно этого добиться?

11. Пусть $f(x) = x^2 + x$. Последовательность положительных чисел $b_1, b_2, \dots, b_{10000}$ такова, что b_1 — произвольное число, а

$$|b_{n+1} - f(b_n)| \leqslant 0{,}001 \quad \text{при } 1 < n < 10000.$$

Докажите, что можно выбрать положительное число a_1 и построить последовательность $a_2 = f(a_1)$, $a_3 = f(a_2)$, …, $a_{10000} = f(a_{9999})$ так, что $|a_n - b_n| \leqslant 0{,}1$ для каждого натурального $n \leqslant 10000$.

12. Даны комплексные числа a, b, c. Известно, что неравенство $|az^2 + bz + c| \leqslant 1$ выполняется для всех z таких, что $|z| \leqslant 1$. Найдите максимальное возможное значение $|bc|$