

7. Рассмотрим многочлен $T_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x^1 + a_0$ с натуральными коэффициентами такой, что для каждого $t \neq 0$ выполнено $T_n(t + \frac{1}{t}) = t^n + \frac{1}{t^n}$. Докажите, что $(a_i, n) > 1$ для всех $0 \leq i \leq n - 1$.

8. Рассмотрим многочлен $P(x)$ степени n такой, что $|P(x)| \leq 1$ для всех $-1 \leq x \leq 1$. Докажите, что

$$\left| P\left(\frac{1}{x}\right) \cdot x^n \right| \leq 2^{n-1}$$

для всех $-1 \leq x \leq 1, x \neq 0$.

9. Рассмотрим $P(x) = P_1(x) = 4x^3 - 3x$ и $P_{n+1}(x) = P(P_n(x))$. Пусть $S(n)$ суть множество корней уравнения $P_n(x) = x$. Докажите, что $S(n) \subseteq S(2n)$ и произведение элементов $S(n)$ совпадает со средним арифметическим значений $S(2n)$.