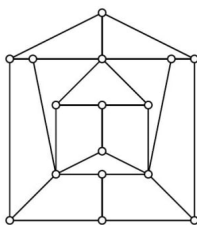


## Гамильтоновы циклы и пути

**Определение.** Гамильтонов путь (цикл) в графе — путь (цикл), проходящий через каждую вершину ровно по одному разу.

1. На какое максимальное число непересекающихся по рёбрам гамильтоновых (а) путей (б) циклов можно разбить полный граф на  $n$  вершинах?
2. (а) Докажите, что в полном ориентированном графе есть гамильтонов путь. (б) Докажите, что для любого  $n$  можно построить полный ориентированный граф, в котором имеется не менее  $\frac{n!}{2^n}$  гамильтоновых путей
3. Докажите, что грани планарного графа, в котором есть гамильтонов цикл, можно покрасить в 4 цвета правильным образом.
4. Есть ли в данном графе гамильтонов цикл?



5. (а) В графе на  $n \geq 3$  вершинах степень каждой вершины не меньше  $\frac{n}{2}$ . Докажите, что в этом графе есть гамильтонов цикл. (б) В графе на  $n \geq 3$  вершинах степень каждой вершины не меньше  $\frac{n-1}{2}$ . Докажите, что в этом графе есть гамильтонов путь.
6. (а) В графе на  $n \geq 3$  вершинах сумма степеней любых двух несмежных вершин не меньше  $n$ . Докажите, что в графе есть гамильтонов цикл. (б) В графе на  $n \geq 3$  вершинах сумма степеней любых двух несмежных вершин не меньше  $n-1$ . Докажите, что в графе есть гамильтонов путь.
7. Дан двудольный граф, по  $n$  вершин в каждой доле. Степень каждой вершины строго больше, чем  $\frac{n}{2}$ . Докажите, что в графе существует гамильтонов цикл.
8. В графе 3333 вершины, и для любых двух его вершин существует гамильтонов путь с концами в этих вершинах. Какое наименьшее число рёбер может быть у такого графа?
9. Рассмотрим граф де Брёйна: вершинами данного графа являются последовательности из нулей и единиц длины  $n$ , а ориентированные рёбра ведут из последовательности  $a_0 a_1 \dots a_{n-1}$  в последовательность  $a_1 a_2 \dots a_n$ . Докажите, что для любого  $n$  в графе де Брёйна есть гамильтонов цикл.

10. Пусть  $G$  — связный граф, имеющий хотя бы три вершины. Определим  $G^3$  как граф на тех же вершинах, в котором соединены ребрами вершины, находящиеся в  $G$  на расстоянии не более трех. Докажите, что в графе  $G^3$  есть гамильтонов цикл.