Очная олимпиада 2

1. Существует ли функция $f(x)$, определённая при всех вещественных x, что для любых вещественных x, y верно
$$|f(x+y)+\sin x+\sin y|<2?$$

2. На большой доске написано число 1000!. Федя проделывает следующую операцию: он выбирает число вида $n!$, являющееся делителем числа, записанного на доске, и прибавляет выбранное число к записанному на доске. Результат записывается на доске, а исходное число стирается. Докажите, что независимо от выбранных чисел, на доске когда-нибудь появится число 2023!.

3. В класс с 2023 апатичными мальчиками, каждый из которых или играет в Brawl Stars, или смотрит в окно, пришли 2023 девочки. Сначала первая приказывает одному мальчику сменить вид занятий, затем вторая приказывает двум мальчикам сменить вид занятий и так далее, наконец, 2023-ая девочка приказывает сменить вид занятий 2023 мальчикам. Докажите, что девочки могут действовать так, чтобы в конце все апатичные мальчики делали одно и то же.

4. В пирамиде $SA_1A_2\ldots A_n$ все боковые рёбра равны. Точка X_1 — середина дуги A_1A_2 описанной окружности треугольника SA_1A_2, точка X_2 — середина дуги A_2A_3 описанной окружности треугольника SA_2A_3 и т. д., точка X_n — середина дуги A_nA_1 описанной окружности треугольника SA_nA_1. Докажите, что описанные окружности треугольников $X_1A_2X_2, X_2A_3X_3, \ldots, X_nA_1X_1$ пересекаются в одной точке.

5. Даны натуральные взаимно простые числа a и b. Таня написала на доске натуральное число $t<b$. Каждую секунду число x на доске заменяется на наименьшее натуральное из четырёх чисел $\{x-a, x+a, x-b, x+b\}$, которое ещё не появлялось на доске до этого. Докажите, что этот процесс будет продолжаться бесконечно долго, причём каждое натуральное число когда-нибудь будет выписано.