Геометрический разнобой

1. На основании AC равнобедренного треугольника ABC взяли произвольную точку X, а на боковых сторонах — точки P и Q так, что $XPBQ$ — параллелограмм. Докажите, что точка Y, симметричная точке X относительно PQ, лежит на описанной окружности треугольника ABC.

2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. Окружность Ω, описанная около треугольника ABC, пересекает прямую A_1C_1 в точках A' и C'. Касательные к Ω, проведённые в точках A' и C' пересекаются в точке B'. Докажите, что прямая BB' проходит через центр окружности Ω.

3. В четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD параллельны и $AB = 2CD$. Прямая l проходит через точку C, пересекает отрезок AB и перпендикулярна CD. Окружность с центром D и радиусом DA пересекает прямую l в точках P и Q. Докажите, что $AP \perp BQ$.

4. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке P, а её диагонали — в точке Q. Известно, что описанная окружность треугольника PBC касается средней линии трапеции. Биссектриса угла P пересекает AD в точке K. Докажите, что $KQ \perp AD$.

5. Точка M лежит на меньшей дуге CD описанной окружности квадрата $ABCD$. Прямые MB и CD пересекаются в точке в точке S, прямые AM и BD пересекаются в точке P, прямые AC и BM пересекаются в точке Q, прямые AM и CD пересекаются в точке R. Докажите, что PS перпендикулярно RQ.

6. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD, BE и CF, пересекающиеся в точке I. Серединный перпендикуляр к отрезку AD пересекает прямые BE и CF в точках M и N соответственно. Докажите, что точки A, I, M и N лежат на одной окружности.

7. В неравнобедренном остроугольном треугольнике ABC точки C_0 и B_0 — середины сторон AB и AC соответственно, O — центр описанной окружности, H — точка пересечения высот. Прямые BH и OC_0 пересекаются в точке P, а прямые CH и OB_0 — в точке Q. Оказалось, что четырехугольник $OPHQ$ — ромб. Докажите, что точки A, P и Q лежат на одной прямой.

8. Дан треугольник ABC. Провели его биссектрисы AM и CN. Известно, что $\frac{\angle BNM}{\angle MNC} = \frac{\angle BMN}{\angle NMA}$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

9. Четырёхугольник $ABCD$ описан вокруг окружности, касающейся сторон AB, BC, CD, DA в точках K, L, M, N соответственно. Точки A', B', C', D' — середины отрезков LM, MN, NK, KL. Докажите, что четырёхугольник, образованный прямыми AA', BB', CC', DD' — вписанный.

10. Пусть A_1 и C_1 — точки касания вписанной окружности со сторонами BC и AB соответственно, а A' и C' — точки касания вневписанной окружности треугольника, вписанной в угол B, с продолжениями сторон BC и AB соответственно. Докажите, что ортоцентр H треугольника ABC лежит на A_1C_1 тогда и только тогда, когда прямые $A'C_1$ и BA перпендикулярны.