# Всё сложится

Один из основных способов нахождение суммы ряда — телескопирование. Его идея в том, чтобы в сумме $a_1 + a_2 + \ldots$ каждое слагаемое представить разностью $(b_{i+1} - b_i)$ для некоторой последовательности $b_j$.

**1.** Найдите сумму **(а)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+4)}$; **(б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$; **(в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+n^2+1}$;
**(г)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{sin^3(3^n x)}{3^n}$; **(д)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n F_{n+2}}$; **(е)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n F_{n+2}}$; **(ж)** $\sum\limits_{i=1}^{\infty} arctg \frac{2}{n^2}$;

Другой способ нахождения суммы ряда — знание разложения в ряд классических функций: $\frac{1}{1-x}, e^x, lnx, sinx, cosx, \ldots$ (для этого полезно знать что такое ряд Тейлора). Также иногда помогает идея дифференцирования.

**2.** Найдите сумму **(а)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$; **(б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{7^n}$; **(в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$;
**(г)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} cos\, kx$ (где $x \neq 2\pi s, s \in \mathbb{Z}$); **(д)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$; **(е)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2n}$; **(ж)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{sin\, nx}{n}$.

Иногда надо просто ограничить сумму ряда. Для этого порой достаточно каждое слагаемое оценить слагаемым другого сходящегося ряда. А порой оказывается полезен интеграл.

**3.** Докажите, что **(а)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \frac{5}{4}$; **(б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}} < 2$;

**(в)** $2(\sqrt{n+1} - 1) < \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n} - 1$;

**(г)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} < 100$, где $a_i$ — $i$-ое по счёту натуральное число без едениц в десятичной записи;

**(д)** $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\varphi(k)}{2^k - 1} < 2$.