Геометрический разнобой

1. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке P, а её диагонали — в точке Q. Известно, что окружность (PBC) касается средней линии трапеции. Биссектриса угла P пересекает AD в точке K. Докажите, что $KQ \perp AD$.

2. На основании AC равнобедренного треугольника ABC взяли произвольную точку X, а на боковых сторонах — точки P и Q так, что $XPBQ$ — параллелограмм. Докажите, что точка Y, симметричная точке X относительно PQ, лежит на описанной окружности треугольника ABC.

3. Докажите, что можно на каждом ребре произвольного тетраэдра записать по неотрицательному числу так, чтобы сумма чисел на сторонах каждой грани численно равнялась её площади.

4. В четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $AB \parallel CD$ и $AB = 2CD$. Прямая l перпендикулярная CD проходит через точку C и пересекает отрезок AB. Окружность с центром D и радиусом DA пересекает прямую l в точках P и Q. Докажите, что $AP \perp BQ$.

5. Точка M лежит на меньшей дуге CD описанной окружности квадрата $ABCD$. Прямые MB и CD пересекаются в точке в точке S, прямые AM и BD пересекаются в точке P, прямые AC и BM пересекаются в точке Q, прямые AM и CD пересекаются в точке R. Докажите, что PS перпендикулярно RQ.

6. Дан треугольник ABC. Провели его биссектрисы AM и CN. Известно, что $\frac{\angle BNM}{\angle MNC} = \frac{\angle BMN}{\angle NMA}$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

7. Четырёхугольник $ABCD$ описан вокруг окружности, касающейся сторон AB, BC, CD, DA в точках K, L, M, N соответственно. Точки A', B', C', D' — середины отрезков LM, MN, NK, KL. Докажите, что четырёхугольник, образованный прямыми AA', BB', CC', DD' — вписанный.

8. Вневписанная в угол B окружность этого же треугольника касается продолжений этих сторон в точках A' и C' соответственно. Докажите, что ортоцентр H треугольника ABC лежит на A_1C_1 тогда и только тогда, когда $A'C_1 \perp BA$.

9. Точка H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC. Биссектриса угла A пересекает описанную окружность ω треугольника AHC в точке P. Точка Q — центр описанной окружности треугольника ABP, а точка T — ортоцентр треугольника ACP. Докажите, что длина отрезка QT равна радиусу ω.

10. Обозначим вписанную окружность треугольника ABC через γ, ее центр через I, а центр описанной окружности через O. Обозначим окружность, проходящую через точки A и B и касающуюся γ через ω_C. Аналогично определим ω_A и ω_B. Пусть A', B' и C' — вторые точки пересечения пар окружностей ω_C с ω_B, ω_A с ω_C и ω_A с ω_B соответственно. Докажите, что прямые AA', BB', CC' и OI пересекаются в одной точке.