Последовательность Штерна-Броко

Запишем две «дроби»: $\left(\frac{0}{1}; \frac{1}{0}\right)$. Теперь будем последовательно выполнять следующую операцию. Вставим между любыми двумя соседними дробями $\frac{m_1}{n_1}$ и $\frac{m_2}{n_2}$ новую дробь $\frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}$ (такую дробь называют медиантой). После первого шага мы получим последовательность $\left(\frac{0}{1}; \frac{1}{1}; \frac{1}{0}\right)$, после второго — $\left(\frac{0}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{1}; \frac{2}{1}; \frac{1}{0}\right)$ и т. д.

1. Докажите, что $\frac{m_1}{n_1} < \frac{m_1+m_2}{n_1+n_2} < \frac{m_2}{n_2}$.

2. Докажите, что ни одно рациональное число не может встретиться на каком-либо шаге построения этой последовательности дважды.

3. Докажите, что если $\frac{m_1}{n_1}$ и $\frac{m_2}{n_2}$ — две соседние дроби последовательности Штерна-Броко на любом шаге её построения, то $m_2n_1 - m_1n_2 = 1$.

4. Докажите, что все дроби, получающиеся в последовательности Штерна-Броко — несократимы.

5. Докажите, что если $\frac{m_1}{n_1}$ и $\frac{m_2}{n_2}$ — две соседние дроби последовательности Штерна-Броко на любом шаге её построения, $\frac{a}{b}$ — некоторая несократимая дробь, и $\frac{m_1}{n_1} < \frac{a}{b} < \frac{m_2}{n_2}$, то $a + b \geqslant m_2 + n_2 + m_1 + n_1$.

6. Докажите, что любое положительное рациональное число будет получено в последовательности Штерна-Броко.

7. **(а)** Три несократимые положительные дроби $\frac{m_1}{n_1} < \frac{a}{b} < \frac{m_2}{n_2}$ таковы, что $m_2n_1 - m_1n_2 = 1$, и $\frac{a}{b}$ является медиантой дробей $\frac{m_1}{n_1}$ и $\frac{m_2}{n_2}$. Докажите, что дробь $\frac{a}{b}$ появляется в последовательности Штерна-Броко из дробей $\frac{m_1}{n_1}$ и $\frac{m_2}{n_2}$.

(б) Дана положительная несократимая дробь $\frac{a}{b}$. Придумайте способ нахождения дробей $\frac{m_1}{n_1}$ и $\frac{m_2}{n_2}$, из которых, в последовательности Штерна-Броко, получается дробь $\frac{a}{b}$.

Указание. Алгоритм Евклида вам в помощь.

Замечание: К последовательности Штерна-Броко близка следующая конструкция. Выпишем в порядке возрастания все правильные дроби, у которых знаменатель не превышает n. Такая последовательность чисел называется рядом Фарея для заданного n (F_n — не путать с числами Фибоначчи).

8. Докажите, что средняя из трёх дробей ряда Фарея F_n является медиантой двух её соседей.