

Алгебра

1. Коэффициенты a, b, c квадратного уравнения $ax^2 - bx + c = 0$ являются степенями двойки. Докажите, что если корни этого уравнения — целые числа, то эти корни совпадают.
2. Докажите неравенство $\sqrt{a+1} + \sqrt{2a-3} + \sqrt{50-3a} \leq 12$.
3. Существуют ли такие четыре многочлена, что сумма любых трех из них имеет хотя бы один корень, а сумма любых двух не имеет корней?
4. Пусть a, b, c — действительные числа, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} a + b + c = 2 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 2 \end{cases}$$

Докажите, что среди этих чисел найдутся два, отличающиеся хотя бы на 1.

5. В бесконечной последовательности $\{x_n\}$ первый член x_1 — рациональное число, большее 1, и $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{[x_n]}$. Докажите, что в этой последовательности найдётся целое число.
6. Функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что $f(f(x)) = x^{2021}$ при всех действительных x . Найдите $f(-1) + f(0) + f(1)$.
7. Про натуральные числа x, y известно, что $x^2 - y^3 = 17$. Докажите, что число $y^2 + 2x + 2$ — составное.