

Алгебра

1. Существуют ли такие четыре многочлена, что сумма любых трех из них имеет хотя бы один корень, а сумма любых двух не имеет корней?
2. Пусть a, b, c — действительные числа, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} a + b + c = 2 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 2 \end{cases}$$

Докажите, что среди этих чисел найдутся два, отличающиеся хотя бы на 1.

3. В бесконечной последовательности $\{x_n\}$ первый член x_1 — рациональное число, большее 1, и $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{[x_n]}$. Докажите, что в этой последовательности найдётся целое число.
4. Функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что $f(f(x)) = x^{2021}$ при всех действительных x . Найдите $f(-1) + f(0) + f(1)$.
5. Про натуральные числа x, y известно, что $x^2 - y^3 = 17$. Докажите, что число $y^2 + 2x + 2$ — составное.
6. Во всех рациональных точках действительной прямой расставлены целые числа. Докажите, что найдётся такой отрезок, что сумма чисел на его концах не превосходит удвоенного числа в его середине.
7. Существует ли такое конечное множество M ненулевых действительных чисел, что для любого натурального n найдется многочлен степени не меньше n с коэффициентами из множества M , все корни которого действительны и также принадлежат M ?