

## Я знаю, что ты знаешь, что я знаю

1. Петя и Вася загадали по натуральному числу и сказали их Коле. Коля написал на одном листе бумаги сумму загаданных чисел, а на другом их произведение. После этого он один из листов съел, а другой — на нём оказалось написано число 2022 — показал Пете и Васе. Увидев это число, Петя сказал, что не знает, какое число загадал Вася. Услышав это, Вася сказал, что не знает, какое число загадал Петя. Какое число загадал Вася?
2. Лев — очень мудрое животное, которое всегда действует рационально. На волшебный остров поселили  $n$  львов и одну козу. Львы могут питаться растущими на острове плодами, но коза для льва вкуснее. Однако остров волшебный, и съевший козу лев сам мгновенно превращается в козу. Ни один из львов не хочет быть съеденным (после того, как станет козой) другим львом, и другие львы об этом знают. При каких  $n$  коза будет съедена?
3. Двум гениям сообщили по натуральному числу и сказали, что эти числа отличаются на 1. После этого они по очереди задают друг другу один и тот же вопрос: "Знаешь ли ты моё число?". Докажите, что рано или поздно ответят "Да".
4. В магазине есть 3 компьютера: американский, который всегда отвечает правду, китайский, который всегда врёт, и русский, который отвечает что попало. Перед покупкой разрешается задать один вопрос любому одному компьютеру. Можно ли задать такой вопрос, чтобы обязательно купить: (а) не китайский; (б) не русский компьютер?
5. Император пригласил на праздник  $N$  волшебников, добрых и злых, при этом волшебники знают, кто добрый и кто злой, а император — нет. Добрый волшебник всегда говорит правду, а злой говорит что угодно. На празднике император сначала выдаёт каждому волшебнику по бумажке с вопросом (требующим ответа «да» или «нет»), затем волшебники отвечают, и после всех ответов император одного изгоняет. Волшебник выходит в заколдованную дверь, и император узнаёт, добрый он был или злой. После этого император вновь выдаёт каждому из оставшихся волшебников по бумажке с вопросом, вновь одного изгоняет, и так далее, пока император не решит остановиться (это возможно после любого из ответов, и после остановки можно никого не изгонять). Докажите, что император может изгнать всех злых волшебников, удалив при этом не более одного доброго.
6. В городе живут  $n$  волшебников из предыдущей задачи ( $n > 1$ ), добрых больше, чем злых. Можно задавать любым горожанам вопросы типа «кем является такой-то» (в частности, можно спросить человека, кем является он сам). Другие вопросы задавать нельзя. Можно ли узнать тип всех горожан за (а)  $2n - 2$  вопроса; (б)  $2n - 3$  вопроса; (в) за меньшее число вопросов?