Конечные плоскости

Определение 1. *Конечной проективной плоскостью* будем называть некоторое конечное множество ("точки") в котором выбраны некоторые подмножества ("прямые") так, что выполняются следующие свойства:

- через любые две точки проходит ровно одна прямая;
- любые две прямые пересекаются ровно в одной точке;
- имеются четыре точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой.

1. **(а)** Докажите, что на каждой прямой в конечной проективной плоскости есть хотя бы три точки.
(б) Докажите, что для каждой проективной плоскости найдётся такое число n, что:

- на каждой прямой лежит $n+1$ точка;
- через каждую точку проходит $n+1$ прямая;
- всего на плоскости имеется n^2+n+1 точка и столько же прямых.

Определение 2. Число n называется *порядком* конечной проективной плоскости.

Определение 3. *Конечной аффинной плоскостью* будем называть некоторое конечное множество ("точки") в котором выбраны некоторые подмножества ("прямые") так, что выполняются следующие свойства:

- через любые две точки проходит ровно одна прямая;
- через данную точку, не лежащую на данной прямой, можно провести ровно одну параллельную ей прямую;
- имеются четыре точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой.

2. Сформулируйте и докажите задачу, аналогичную первой, но уже для конечных аффинных плоскостей.

3. Докажите, что конечная проективная плоскость порядка n существует тогда и только тогда, когда существует конечная аффинная плоскость порядка n.

Замечание. Понятно, что если существует конечное поле из n элементов, то существует аффинная (соответственно и проективная) конечная плоскость порядка n (то есть в частности для простых n такие плоскости существуют).

4. Пусть в правильном (n^2+n+1)-угольнике нашлись такие k точек, что среди попарных расстояний между ними встречаются всевозможные расстояния между точками многоугольника, причём ровно по разу. Докажите, что тогда существует конечная проективная плоскость порядка n.

5. Какое наибольшее количество клеток в квадрате 57×57 можно закрасить так, чтобы никакие 4 не были вершинами прямоугольника?

Определение 4. *Латинским квадратом* порядка n будем называть квадрат $n\times n$, заполненный числами от 1 до n так, что в каждой строчке и в каждом столбце написана некоторая перестановка чисел от 1 до n.

Определение 5. Представим, что мы наложили друг на друга два латинских квадрата и теперь у нас получился квадрат $n\times n$, в каждой клетке которого стоит упорядоченная пара чисел (первое — из первого квадрата, второе — из второго). Если получившиеся n^2 пар вышли различными, то мы будем называть исходные два квадрата *ортогональными*.

6. Будем называть множество латинских квадратов размера n *кайфовым*, если они попарно ортогональны.
(а) Докажите, что в кайфовом множестве не более $n-1$ элемента.
(б) Докажите, что кайфое множество из $n-1$ элемента существует тогда и только тогда, когда существует конечная проективная плоскость порядка n.