Уравнения Пелля

Определение 1. Уравнение в целых числах вида $x^2 - my^2 = 1$, где m — натуральное число, не являющееся точным квадратом, называется *уравнением Пелля*. Его решение (x_0, y_0) называется *нетривиальным*, если $(x_0, y_0) \neq (\pm 1, 0)$. Нетривиальное решение уравнения Пелля (x_0, y_0) называется *минимальным*, если $x_0, y_0 > 0$ и $x_0 + y_0\sqrt{m}$ минимально среди всех положительных решений уравнения Пелля.

Определение 2. Рассмотрим множество $\mathbb{Z}\left[\sqrt{m}\right]$, состоящее из всех чисел вида $x + y\sqrt{m}$, где x, y — целые, m — натуральное. Для каждого числа определим *норму* $N(x+y\sqrt{m}) = (x+y\sqrt{m})(x-y\sqrt{m}) = x^2 - my^2$. Будем говорить, что $a \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{m}\right]$ *делится* на $b \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{m}\right]$, если существует $c \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{m}\right]$ такое, что $a = bc$.

Замечание. Решить уравнение Пелля $\Leftrightarrow$ найти все числа с нормой 1 в $\mathbb{Z}\left[\sqrt{m}\right]$.

Упражнение. Докажите, что норма в $\mathbb{Z}\left[\sqrt{m}\right]$ мультипликативна, т.е. для любых $a, b \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{m}\right]$ верно $N(ab) = N(a)N(b)$.

1. Пусть (a, b) — минимальное решение уравнения Пелля $x^2 - my^2 = 1$. Определим $f(x, y) = (ax + mby, ay + bx)$. (Откуда это? Из произведения $a + b\sqrt{m}$ и $x + y\sqrt{m}$.)
   (а) Докажите, что если (x, y) — решение уравнения Пелля, то $f(x, y)$ — тоже решение уравнения Пелля.
   (б) Докажите, что если (x, y) — решение уравнения Пелля и $x + y\sqrt{m} > 1$, то $x, y \in \mathbb{N}$.
   (в) Исходя из решения $(x_0, y_0) = (1, 0)$ можно получить бесконечную последовательность решений (x_i, y_i) по формуле $(x_i, y_i) = f(x_{i-1}, y_{i-1})$. Докажите, что других положительных решений у уравнения Пелля не существует и найдите формулу для всех решений (через a, b, m и натуральное n).

2. **(а)** Пусть $x_1 + y_1\sqrt{m}$ и $x_2 + y_2\sqrt{m}$ принадлежат $\mathbb{Z}\left[\sqrt{m}\right]$ и $n = N(x_2 + y_2\sqrt{m})$. Докажите, что если $x_1 \equiv x_2 \pmod{n}$ и $y_1 \equiv y_2 \pmod{n}$, то $x_1 + y_1\sqrt{m}$ делится на $x_2 + y_2\sqrt{m}$.
   (б) Докажите, что если у уравнения $x^2 - my^2 = n$ более n^2 решений в целых неотрицательных числах, то найдётся нетривиальное решение уравнения $x^2 - my^2 = 1$.

3. **(а)** Докажите, что для любого α какое-то из чисел $\alpha, 2\alpha, \ldots, n\alpha$ отличается от целого числа не более чем на $\frac{1}{n+1}$.
   (б) **Теорема Дирихле.** Докажите, что существует бесконечно много пар натуральных p, q таких, что $\left|\frac{p}{q} - \sqrt{m}\right| < \frac{1}{q^2}$.
   (в) Докажите, что для какого-то C существует бесконечно много чисел в $\mathbb{Z}\left[\sqrt{m}\right]$, модуль нормы которых меньше C.
   (г) Докажите, что любое уравнения Пелля имеет нетривиальное решение.

4. Пусть $x = a + b\sqrt{m}$ — наименьшее число нормы 1 в $\mathbb{Z}\left[\sqrt{m}\right]$. Докажите, что найдётся конечное (возможно пустое) множество чисел $y_1, y_2, \ldots y_k$ нормы n такое, что все числа нормы n имеют вид $y_i x^t$.