Свежая геометрия

1. Точка X — произвольная точка на стороне AD квадрата $ABCD$. Докажите, что прямая, соединяющая точки касания вписанной окружности треугольника ABX со сторонами AX и BX, проходит через центр квадрата.

2. Точка O — центр описанной окружности S треугольника ABC. Окружность с центром на AB, проходящая через точки A и O, повторно пересекает S в точке D. Окружность с центром на AC, проходящая через точки A и O, пересекает повторно S в точке E. Докажите, что прямые BD и CE параллельны.

3. Высоты AA_1, BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Прямые AA_1 и B_1C_1 пересекаются в точке X. Перпендикуляр к AC, проведённый через точку X, пересекает сторону AB в точке Y. Докажите, что прямая YA_1 делит отрезок BH пополам.

4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD, BE и CF. На высоте AD выбрана точка Q. Описанные окружности треугольников QDE и QDF пересекают прямую BC повторно в точках X и Y. Докажите, что $BX = CY$.

5. Точка X — произвольная точка на стороне BC треугольника ABC. Треугольник T образован биссектрисами углов ABC, ACB и AXC. Докажите, что
   (а) описанная окружность треугольника T проходит через вершину A.
   (б) ортоцентр треугольника T лежит на прямой BC.

6. Вписанный четырехугольник $ABCD$ таков, что $AB < BC$ и $AD < DC$. На сторонах BC и CD отмечены точки E и F соответственно такие, что $AB = BE$, $AD = DF$. Точка M — середина отрезка EF. Докажите, что прямые BM и DM перпендикулярны.

7. AB — наименьшая сторона остроугольного треугольника ABC, точка D — середина стороны AB. Пусть P — точка внутри ABC такая, что $\angle CAP = \angle CBP = \angle ACB$. Точки M и N — проекции точки P на стороны AC и BC соответственно. Через точку M провели прямую, параллельную BC, а через точку N — параллельную AC. Эти прямые пересекаются в точке K. Найдите KD/PC.