Очередной разнобой

1. Из Сочи в Москву поочерёдно выходят путники, на каждом из которых сидит своя муха. Все путники идут с постоянными различными скоростями; для любой пары путников известно, что более медленный из них вышел из Сочи раньше, но пришёл в Москву позже. Когда два путника встречаются, мухи на них меняются местами (никакие три путника не встречаются вместе одновременно). Докажите, что какая-то муха побывает на всех путниках.

2. Докажите, что из бесконечной арифметической прогрессии с первым членом a и разностью $d \neq 0$ можно выбрать подпоследовательность, являющуюся бесконечной геометрической прогрессией, тогда и только тогда, когда отношение $\frac{a}{d}$ рационально.

3. Пусть $n > 1$ и p — нечётные натуральное и простое числа соответственно. Докажите, что если сумма n-ых степеней двух натуральных чисел равна степени p, то n является степенью числа p.

4. Два мага сражаются друг с другом. Вначале они оба парят над морем на высоте 100 метров. Маги по очереди применяют заклинания вида «уменьшить высоту парения над морем на a метров у себя и на b метров у соперника», где a, b — действительные числа, $0 < a < b$. Набор заклинаний у магов один и тот же, их можно использовать в любом порядке и неоднократно. Маг выигрывает дуэль, если после чьего-либо хода его высота над морем будет положительна, а у соперника — нет. Существует ли такой набор заклинаний, что второй маг может гарантированно выиграть (как бы ни действовал первый), если при этом число заклинаний в наборе
   (а) конечно; **(б)** бесконечно?

5. Барон Мюнхгаузен утверждает, что придумал такую комбинацию вращений кубика Рубика, что из любого состояния кубика можно перейти в собранное, повторив эту комбинацию достаточное число раз. Не привирает ли барон?

6. Даны n действительных чисел. Разность между их произведением и каждым из этих чисел — нечётное число. Докажите, что все данные n чисел иррациональны.