Хроматический многочлен

Будем обозначать количество правильных раскрасок графа G в t цветов как $\chi_G(t)$.

1. **Соотношение удаления-стягивания.** Докажите, что
$$\chi_G(t) = \chi_{G'_e}(t) - \chi_{G''_e}(t),$$
где G'_e — граф с удалённым ребром e, а G''_e — граф со стянутым ребром e.

2. **Теорема Уитни.** Пусть G — граф с n вершинами, m рёбрами и k компонентами связности. Тогда
$$\chi_G(t) = t^n - a_1 t^{n-1} + a_2 t^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-k} a_{n-k} t^k,$$
причём $a_1, \ldots, a_{n-k}$ — натуральные и $a_1 = m$.

3. Известно, что $\chi_G(t) = x^4 - 3x^3 + sx^2$. Найдите s.

4. **(а)** Вычислите $\chi_T(t)$, где T — дерево на n вершинах.
(б) Докажите, что любой граф с таким хроматическим многочленом является деревом на n вершинах.

5. Пусть D — граф триангуляции n угольника. Вычислите $\chi_D(t)$.

6. **(а)** Вычислите $\chi_{C_n}(t)$, где C_n — цикл на n вершинах.
(б) Докажите, что любой граф с таким хроматическим многочленом является циклом на n вершинах.

7. Ориентация рёбер графа G называется *ациклической*, если она не содержит ориентированных циклов. Докажите, что число ациклических ориентаций рёбер графа G равно $|\chi_G(-1)|$.

8. Пусть $G = \langle V, E\rangle$ — граф с множеством вершин V и множеством рёбер E. Для любого подмножества рёбер $T \subset E$ определим $c(T)$ как количество компонент связности графа $\langle V, T\rangle$. Тогда
$$\chi_G(t) = \sum_{T\subset E} (-1)^{|T|} x^{c(T)}.$$