Асимптотика

1. Любое ли натуральное число можно превратить в квадрат, дописав между цифрами его десятичной записи не более 100 цифр (в начало и конец дописывать тоже можно)?

2. Плоскость разбита на равные многоугольники, причём в каждом многоугольнике содержится ровно по одной целой точке, и на границе целых точек нет. Докажите, что площадь многоугольников равна единице.

3. Существует ли отображение из некоторого трёхмерного шара в некоторый плоский круг, для каждой пары точек не уменьшающее расстояние между ними?

4. Докажите, что для любых натуральных n и k существует такой полный ориентированный граф G, обладающий свойством: для любого множества A, состоящего из k вершин графа G, существует такое множество B, состоящее из n вершин графа G, что A и B не имеют общих вершин и нет никаких стрелок из A в B.

5. На клетчатой плоскости проведены прямые $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_{99}$, каждая из которых проходит через пару узлов целочисленной решётки. Для каждого конечного множества M, состоящего из узлов целочисленной решётки, определим его *тень* как набор $(M_1, M_2, \ldots, M_{99})$ проекций множества на прямые $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_{99}$ соответственно. Докажите, что существует миллион попарно несовпадающих конечных множеств, состоящих из узлов целочисленной решётки, тени которых совпадают.

6. Дано множество V из n вершин, пронумерованных числами от 1 до n. Граф G на вершинах V называется *графом хорд*, если существует такое расположение n пронумерованных хорд некоторой окружности, что вершины i и j смежны в G тогда и только тогда, когда хорды i и j пересекаются. Верно ли, что для любого n любой граф с множеством вершин V можно представить как объединение не более чем 10 графов хорд?

7. Докажите, что существует бесконечно много чисел, не представимых в виде $n+s(n)$, где $s(n)$ обозначает сумму цифр десятичной записи числа n.