Линейная алгебра: скалярное произведение и задачи

Самое полезное утверждение в этом листике. Любые $n+1$ векторов в пространстве $\mathbb{R}^n$ линейно зависимы.

Скалярным произведением двух векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ назовём число

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \ldots + x_n \cdot y_n.$$

Легко проверить, что скалярное произведение линейно по каждому аргументу: при всех $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ выполнено $(\lambda \cdot \mathbf{u} + \mu \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \lambda \cdot (\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \mu \cdot (\mathbf{v}, \mathbf{w})$.

1. Два вектора пространства $\mathbb{R}^n$ *ортогональны*, если их скалярное произведение равно 0. Докажите, что если несколько ненулевых векторов попарно ортогональны, то все эти векторы линейно независимы. *Попробуйте какое-нибудь векторное равенство скалярно домножить на какой-нибудь вектор.*

2. Школьники с переменным успехов появлялись на онлайн-занятиях математического кружка. К концу карантина выяснилось, что каждый из школьников посетил ровно n занятий, а любые два школьника посетили одновременно ровно k занятий, причём $k < n$. Докажите, что количество занятий на карантине было не меньше числа школьников в группе.

3. Несколько школьников писали из дома в условиях самоизоляции финал ВсОШ по математике из 2^k простых задач с проверкой по ответам ($k \geqslant 2$). Каждый школьник решил правильно ровно половину задач. Оказалось, что любые два школьника ровно четверть всех задач решили оба и ровно четверть всех задач не решили оба.

(а) Докажите, что количество школьников не превосходило $2^k - 1$.

(б) Постройте пример описанной ситуации с $2^k - 1$ школьником.

4. *Расстояние* между двумя точками $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ пространства $\mathbb{R}^n$ определим как значение выражения $\sqrt{(\mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{x}-\mathbf{y})}$. Докажите, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ нельзя расположить $n+2$ различные точки так, чтобы попарные расстояния между ними были равны.

5. В КИМах ЕГО (Единой Государственной Олимпиады) n тестовых вопросов, на каждый из которых можно ответить либо правильно, либо неправильно. В 2020 году в ЕГО приняли участие k человек. Результаты участников оказались такими, что проверочная комиссия может так приписать положительные веса тестовым вопросам, чтобы участники по первичным балам расположились в любом наперёд проплаченном порядке. Докажите, что $n \geqslant k$.