Геометрический разнобой

1. S_1 и S_2 — окружности, не имеющие общих точек. Общая внешняя касательная касается окружностей в точках A и B. Окружность S_3 проходит через A и B и вторично пересекает S_1 и S_2 в точках C и D. K — точка пересечения прямых, касающихся S_1 и S_2 в точках C и D. Докажите, что $KC = KD$.

2. Окружность, проходящая через вершины A и B треугольника ABC, пересекает его стороны AC и BC в точках P и Q соответственно. Медиана из вершины C делит дугу PQ этой окружности пополам. Докажите, что $AC = BC$.

3. На стороне BE треугольника ABE выбраны точки C и D такие, что $BC = CD = DE$. Точки X, Y, Z и T — центры описанных окружностей треугольников ABE, ABC, ADE и ACD соответственно. Докажите, что T — точка пересечения медиан треугольника XYZ.

4. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ ($\angle A < 90°$) отмечена точка T так, что треугольник ATD — остроугольный. Пусть O_1, O_2 и O_3 — центры описанных окружностей треугольников ABT, DAT и CDT соответственно. Докажите, что точка пересечения высот треугольника $O_1O_2O_3$ лежит на прямой AD.

5. Биссектриса угла между диагоналями вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекает стороны AB и CD в точках X и Y соответственно. Известно, что середина стороны AD равноудалена от точек X и Y. Докажите, что середина стороны BC также равноудалена от точек X и Y.

6. На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ выбраны точки A_1 и C_1 соответственно. Отрезки AC_1 и CA_1 пересекаются в точке P. Описанные окружности треугольников AA_1P и CC_1P вторично пересекаются в точке Q, лежащей внутри треугольника ACD. Докажите, что $\angle PDA = \angle QBA$.

7. Неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность ω. Касательная к этой окружности в точке C пересекает прямую AB в точке D. Пусть I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Прямые AI и BI пересекают биссектрису угла CDB в точках Q и P. Пусть M — середина отрезка PQ. Докажите, что прямая MI проходит через середину дуги ACB окружности ω.

8. Четырёхугольник $ABCD$ с попарно непараллельными сторонами описан около окружности с центром O. Докажите, что точка O совпадает с точкой пересечения средних линий четырёхугольника $ABCD$ тогда и только тогда, когда $OA \cdot OC = OB \cdot OD$.

9. Дан неравнобедренный треугольник ABC. Пусть N — середина дуги BAC его описанной окружности, а M — середина стороны BC. Обозначим через I_1 и I_2 центры вписанных окружностей треугольников ABM и ACM соответственно. Докажите, что точки I_1, I_2, A, N лежат на одной окружности.