Линейная алгебра: теория

Пусть $\mathbb{K}$ — *поле*, нас снова будут интересовать лишь примеры $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p$. Операции внутри поля будут обозначаться символами «$+_{\mathbb{K}}$», «$\cdot_{\mathbb{K}}$», а элементы $\lambda \in \mathbb{K}$ называться *числами*.

Линейный (векторным) пространством над полем $\mathbb{K}$ называется множество V (элементы $\mathbf{v} \in V$ которого будут называться *векторами*), снабжённое операциями сложения векторов «$+_V$» и умножения числа на вектор «$\cdot_V$», удовлетворяющими следующим свойствам (аксиомам):

- $(V, +_V)$ — *коммутативная (абелева) группа*: сложение векторов ассоциативно и коммутативно; существует нейтральный по сложению вектор $\mathbf{0}$; для каждого вектора $\mathbf{v}$ существует обратный по сложению $-\mathbf{v}$.
- Дистрибутивность (левая и правая): $(\lambda + \mu) \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v} + \mu \cdot \mathbf{v}$, $\lambda \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \lambda \cdot \mathbf{v} + \lambda \cdot \mathbf{w}$.
- Ассоциативность разных умножений и унитарность: $(\lambda \cdot \mu) \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot (\mu \cdot \mathbf{v})$, $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$.

Индексы операций опущены, но по аргументам легко догадаться, о каком именно сложении или умножении идёт речь. В дальнейшем будет опущен также знак умножения.

1. Какие из следующих множеств являются векторными пространства относительно естественных операций? (Предъявите табличку с ответами «да» или «нет».)
(а) $\mathbb{R}$ над полем $\mathbb{Q}$.
(б) $\mathbb{Q}$ над полем $\mathbb{R}$.
(в) Бесконечные последовательности вещественных чисел над полем $\mathbb{R}$.
(г) Ограниченные бесконечные последовательности рациональных чисел над полем $\mathbb{Q}$.
(д) Неубывающие бесконечные последовательности вещественных чисел над полем $\mathbb{R}$.
(е) Бесконечные периодические последовательности остатков по простому модулю p над полем $\mathbb{Z}_p$.
(ж) Многочлены степени ровно 100 с комплексными коэффициентами над полем $\mathbb{C}$.
(з) Множество рациональных решений однородной СЛУ с коэффициентами из $\mathbb{Q}$ над полем $\mathbb{Q}$.
(и) Множество вещественных решений неоднородной СЛУ с коэффициентами из $\mathbb{R}$ над полем $\mathbb{R}$.
(к) Бесконечные последовательности F_n вещественных чисел, удовлетворяющие рекуррентному соотношению $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ над полем $\mathbb{R}$.

Выражение вида $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{v}_k$ называется *линейной комбинацией* векторов $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$. Линейная комбинация *тривиальна*, если все $\lambda_i = 0$. Набор векторов $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ называется *линейно зависимым*, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов со значением $\mathbf{0}$.

2. Докажите, что набор векторов линейно зависим тогда и только тогда, когда один из векторов этого набора выражается как линейная комбинация остальных.

Набор векторов $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ называется *порождающим*, если любой вектор пространства V можно представить в виде линейной комбинации векторов этого набора.

Базисом пространства называется такой порождающий набор векторов, что любой вектор пространства V можно представить в виде линейной комбинации векторов этого набора **единственным образом**.

3. Докажите, что порождающий векторное пространство набор векторов является базисом тогда и только тогда, когда он линейно независим.

4. **Лемма о замене.** Если векторы $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ порождают пространство V, а $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ линейно независимы, то $m \geqslant k$ и векторы $\mathbf{v}_i$ можно перенумеровать так, что набор векторов
$$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_m$$
полученный заменой первых k из них на векторы $\mathbf{u}_i$ тоже будет порождающим.

5. **Теорема о базисе.** Если в вектором пространстве есть конечный базис, то каждый порождающий набор векторов содержит в себе некоторый базис, все базисы состоят из одинакового количества векторов, и каждый линейно независимый набор векторов можно дополнить до базиса.

Размерностью линейного пространства V называется количество векторов в любом его базисе (обозначение: $\dim V$). Если же у пространства нет конечных базисов, то оно полагается бесконечной размерности.

Если в линейном пространстве V выбран фиксированный базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, то всякий вектор $\mathbf{v} \in V$ единственным образом раскладывается в линейную комбинацию базисных векторов:
$$\mathbf{v} = x_1 \cdot \mathbf{e}_1 + x_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \ldots + x_n \cdot \mathbf{e}_n.$$

Коэффициенты $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ этого разложения называются *координатами* вектора $\mathbf{v}$. Отображение $f : V \to \mathbb{K}^n$, сопоставляющее всякому вектору набор его координат, является изоморфизмом линейных пространств V и $\mathbb{K}^n$. Следствие: линейные пространства одинаковой размерности изоморфны.

Подпространством линейного пространства V называется его любое непустое подмножество W, замкнутое относительно операций сложения векторов и умножения вектора на любое число. Подпространство само является линейным пространством относительно индуцированных операций.

6. *Суммой* подпространств V_1, V_2 линейного пространства V (обозначение $V_1 + V_2$) назовём линейную оболочку их объединения. Докажите, что
$$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2).$$